

# 非線形状態空間モデル及びモンテカルロ・フィルタによる 可変 NAIRU の推定

高部 勲<sup>†</sup>

Estimation of Time Varying NAIRU by Nonlinear State Space Model and Monte Carlo Filter

TAKABE Isao

本稿では、我が国の構造的・摩擦的失業を分析するための指標として可変 NAIRU (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment: インフレを加速させない失業率)を推定し、その性質について分析している。本稿では状態空間モデルによる方法に着目し、推定を試みた。パラメータを定数と考えて推定した場合、推定期間中にパラメータの大幅な変動があった場合に、パラメータの値を過大 (又は過小) に評価してしまうことになる。そこで本稿ではすべてのハイパーパラメータが時間とともに変動するような非線形な時変パラメータモデルを考え、モンテカルロ・フィルタにより推定を行っている。カルマンフィルタの手法によって推定された NAIRU について分析したところ、既存の研究や日銀短観などの指標と整合的であり、構造的・摩擦的失業に関する既存の研究結果をよく裏付ける結果となっていることが分かった。モンテカルロ・フィルタによる推定結果を見ると、失業率とインフレ率をつなぐ係数の絶対値は一貫して 0 に近づいていることが観察され、失業とインフレの関係が弱まっていることが改めて確認された。

キーワード：構造的・摩擦的失業率、修正フィリップス曲線、NAIRU、状態空間モデル、カルマンフィルタ、モンテカルロ・フィルタ、自己組織化モデル

In this paper, the time varying NAIRU (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment) is estimated to analyze the structural unemployment in Japan. In this paper, the State Space Modeling method is applied to estimate NAIRU. If the hyper parameter is set as a constant value in the model, it may be estimated higher or lower than the actual value when the drastic changes occur in time series. To avoid this difficulty, the Monte Carlo filter adopting the nonlinear model with the time varying parameter is applied to estimate the parameters. By the Kalman filter method, the estimated NAIRU is consistent with the earlier studies and some indicators including TANKAN. By the Monte Carlo filter method, it is confirmed that the correlation between the unemployment rate and the inflation rate is rather weakening by observing the absolute value of the coefficient parameter moves closer to zero in the estimation of the time varying hyper parameter.

Key words: Structural Unemployment, Modified Phillips Curve, NAIRU, State Space Model, Kalman Filter, Monte Carlo Filter, Self-organizing Model

## はじめに

本稿では、構造的・摩擦的失業率を表す指標である NAIRU (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment：インフレを加速させない失業率) に着目し、我が国における構造的・摩擦的失業の分析を行っている。NAIRU は失業率からインフレ率、すなわち需給に関する要因を除いたものと考えられ、NAIRU からの乖離を計測することで、本来あるべき水準からのギャップを把握できる。本稿では時変係数フィリップス曲線の推定も行っている。これはパラメータが時間的に変化する非線形モデルをモンテカルロ・フィルタの方法で推定するもので、フィリップス曲線の係数などの時間変化を調べるのに役立つ。モンテカルロ・フィルタは近年急速に発達している時系列解析の手法であり、工学における物体追跡の研究(市村(2002))や金融工学への応用(高橋・佐藤(2002))などで用いられる。

ここで本稿の構成について説明する。第1章では構造的・摩擦的失業、フィリップス曲線、修正フィリップス曲線、NAIRU など、本稿の分析で用いられる基本的な概念について整理する。またフィリップス曲線を動的的に捉え、これを構成する各成分の確率モデルを定義する。そしてこれらの確率モデルを状態空間モデルの形に表現する。第2章では、状態空間モデルの各成分を効率的に推定することのできるカルマンフィルタの手法について説明する。そして全国レベルのデータに対して NAIRU の推定を行い、これと先行研究とを比較することで、モデルの定式化のチェックを行い、推定結果について考察する。第3章ではこれまでの固定していたハイパーパラメータが時間とともに変動するより複雑な非線形状態空間モデルを想定する。そしてモンテカルロ・フィルタにより、時変ハイパーパラメータの仮定の下での NAIRU の推定を行う。計算面での工夫については、補論で述べている。

## 第1章 フィリップス曲線と状態空間モデル

### 1.1 構造的・摩擦的失業と UV 曲線

厚生労働省の分析では、失業を下記のように分類している(平成14年版 労働経済の分析)。

- (1) 需要不足失業：景気後退期の需要減少で生じる失業
- (2) 構造的失業：企業が求める人材と求職者の持つ特性(職業能力、年齢等)との違いにより生じる失業
- (3) 摩擦的失業：転職や新たに就職する際に企業と労働者の持つ情報が不完全であることや労働者が地域間を移動する際に時間が掛かること等により生じる失業

構造的失業と摩擦的失業を明確に区分することは困難であるため、通常は両者を併せて「構造的・摩擦的失業」と呼ぶ。構造的・摩擦的失業率の推定手法としては、以下のような様々な方法がある。

- ① UV 曲線による方法
- ② 状態空間モデルによる方法
- ③ HP<sup>1</sup> フィルタによる方法
- ④ 構造 VAR<sup>2</sup> モデルによる方法

<sup>1</sup> Hodric-Prezscott Filter

<sup>2</sup> Vector autoregressive model：ベクトル自己回帰モデル

我が国では職業安定統計、賃金統計などの統計が充実していることもあり、特に①の UV 分析の手法による分析が数多く行われている（労働政策研究・研修機構（2004））。UV 曲線は雇用失業率（Unemployment rate）と欠員率（Vacancy rate）の関係を示した原点に対して凸な右下がりの曲線である。この曲線と 45 度線との交点を均衡失業率とし、これを構造的・摩擦的失業率の代理指標とするものである。厚生労働省では UV 曲線に基づく手法により、構造的・摩擦的失業率を推定している。この分析によると、2003 年第 IV 四半期の完全失業率 5.07%のうち構造的・摩擦的失業率は 4.13%となっており、失業率全体の約 8 割が構造的・摩擦的失業率で占められる結果となっている。しかし厚生労働省の UV 曲線による分析には、次のような問題点があることが指摘されている（北浦 他（2003）、労働政策研究・研修機構（2004））。

- ① 構造要因の説明変数の選択が困難である。
- ② UV 曲線の当てはまりの良い期間の選択が恣意的になる可能性がある。
- ③ UV 曲線と 45 度線の交点は飽くまでも労働市場の不完全性の 1 つの基準であって、構造的・摩擦的失業の指標となり得る理論的な根拠が無い。
- ④ UV 曲線のシフトが考慮されていない。
- ⑤ 欠員率には職業安定統計を用いるが、これは労働市場全体の求人をカバーしていない。
- ⑥ 構造要因自体が循環的要素を含む場合があり得るが、これが考慮されていない。

以上のような問題点があることから、構造的・摩擦的失業の分析に UV 分析を用いることは適当ではないと考えられる。そこで本稿では状態空間モデルを用いた手法に焦点を当てて分析を行う。状態空間モデルによる手法には、以下のように様々なメリットがある。

- ① 状態空間モデルでは可変 NAIRU の推定を行うことができ、構造要因に循環的な変動が含まれる場合も扱うことが可能である。
- ② インプットとして用いるデータは失業率とインフレ率だけで良いので、少ないデータで分析を行うことができる。
- ③ 変数やモデルの決定には情報量基準を用いることが可能なため、客観的なモデル選択を行うことができる。

我が国では状態空間モデルによる NAIRU の推定例は少ないものの、海外では多くの研究が行われている。代表的なものとしては、Richardson et al.（2000）、Laubach（2001）、Logeay, Tober（2003）、Yoshioka（2002）などがある。

## 1.2 修正フィリップス曲線と NAIRU

インフレ率と失業率との間にはトレードオフの関係が観察される。これがフィリップス曲線であり、式で表すと以下ようになる。

$$\pi_t = \alpha + \beta u_t + v_t \quad (1.1)$$

ここで  $\pi_t$  はインフレ率、 $u_t$  は失業率をそれぞれ表す。 $v_t$  は残差である。係数には  $\beta < 0$  という制限がある。ただし、フィリップス曲線ではスタグフレーションを説明できないという問題点があり、以下のような修正フィリップス曲線が提案された（労働政策研究・研修機構（2004））。

$$\begin{aligned} \pi_t &= \underline{\underline{\pi_t^e}} + \beta(\underline{\underline{u_t - u_t^*}}) + v_t \\ (\pi_t - \pi_t^e &= \beta(u_t - u_t^*) + v_t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\pi_t^e$ は期待インフレ率であり、 $u_t^*$ は自然失業率である。インフレが経済に影響を与えるような状況を考慮する際には、インフレ率そのものではなく、人々の形成するインフレ期待が重要になってくる。修正フィリップス曲線はこの点を考慮している。

自然失業率  $u_t^*$  は、構造的・摩擦的失業だけが存在するときの失業率であり、完全雇用産出量に対応する。失業率  $u_t$  が自然失業率の水準にあるときには、(残差を無視すると) 期待インフレ率と実際のインフレ率との間にギャップが生じないため、 $u_t^*$ は NAIRU (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment : インフレを加速させない失業率) とも呼ばれる。NAIRU は、景気循環に関連する変動を失業率から除いたものと考えられることができるので、構造的・摩擦的失業の代理変数として用いられることが多い。NAIRU は定数と仮定されることが多いものの、失業の構造は時間とともに変化すると考えられるので、NAIRU が時間に関して可変であるとした分析も最近では行われている。可変 NAIRU の推計には状態空間モデルとカルマンフィルタが用いられる (Richardson. et al. (2000))。

最近の計量分析の結果から、フィリップス曲線は式 (1.2) のように線形ではなく、以下に示すような非線形の形状をしていることが指摘されている (労働政策研究・研修機構 (2004))。

$$\pi_t = \pi_t^e + \beta(u_t - u_t^*)/u_t + v_t \quad (1.3)$$

式 (1.3) は失業率  $u_t$  に対しては非線形であるものの、未知の変数  $u_t^*$  に対しては線形なモデルとなっており、線形状態空間モデルで表現できる。

### 1.3 失業率の分解モデル

期待インフレ率と NAIRU は直接に観察することができない。そこで何らかの仮定の下でこれらの要素に関するモデルを設定し、推定を行う。この節では完全失業率を傾向的な変動 (NAIRU) と季節変動と循環的な変動に分けるようなモデルについて説明する。完全失業率の四半期系列  $u_t$  は以下のような要素に分解されると仮定する。

$$u_t = u_t^* + s_t + g_t + \varepsilon_t^u \quad \varepsilon_t^u \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (1.4)$$

上記の式 (1.4) の中で、 $u_t^*$ は NAIRU を、 $s_t$ は季節的な変動をそれぞれ表している。また  $g_t$ は循環的な変動であり、季節性以外の様々な周期の変動が含まれる。 $\varepsilon_t^u$ は残差であり、正規分布に従う確率変数であると仮定される。

#### 1.3.1 NAIRU のモデル

失業率の系列をトレンドと、周期的な変動に分けることを考える。多くの実証研究では NAIRU を非常に滑らかに変動するものとし、局所的には直線とみなせると仮定して、2次のトレンドモデルを用いている。1次のトレンドモデルを仮定した分析もあるものの、そのようなモデルを用いると NAIRU の推定値の分散が 0 になり、定数になってしまうことが指摘されている (Stock and Watson (1998)、労働政策研究・研修機構 (2004))。本稿の研究ではこのような点を踏まえて、以下のような2次のトレンドモデルを仮定する。

$$u_t^* = 2u_{t-1}^* - u_{t-2}^* + \varepsilon_t^{u^*} \quad \varepsilon_t^{u^*} \sim N(0, \sigma_{u^*}^2) \quad (1.5)$$

$$(\Leftrightarrow u_t^* - u_{t-1}^* = u_{t-1}^* - u_{t-2}^* + \varepsilon_t^{u^*})$$

### 1.3.2 季節変動のモデル

季節変動は、時系列の中でちょうど1年周期で変動するような要因を表している。NAIRUの分析では、季節変動を季節調整によって事前に取り除くことが多い。しかし季節調整がフィリップス曲線の推定に影響を与える可能性もあり、北川・川崎(2001)でも触れられているように季節変動の除去もプロシジャの一部として内生化されなければならない。そこで本稿では以下のように季節変動要因を明示的にモデルの中に取り込み推定を行っている。

$$s_t = -\sum_{k=1}^3 s_{t-k} + \varepsilon_t^s \quad \varepsilon_t^s \sim N(0, \sigma_s^2) \quad (1.6)$$

$$(\Leftrightarrow \sum_{k=0}^3 s_{t-k} = \varepsilon_t^s)$$

### 1.3.3 循環的失業率のモデル

循環的失業率  $g_t$  は AR 過程で表現されると仮定する。2次のモデルで十分に循環変動を表現でき、しかも係数パラメータの推定の際に、特性方程式の根に制限を加える操作が容易であることから、本稿では2次の AR モデルを採用している。

$$g_t = \phi_1 g_{t-1} + \phi_2 g_{t-2} + \varepsilon_t^g \quad \varepsilon_t^g \sim N(0, \sigma_g^2) \quad (1.7)$$

状態空間モデルによる解析で AR 過程を扱う際には、定常性と可逆性の条件が常に満たされるように AR モデルの係数  $\phi_i$  に対して適当な変換を行うことが多い。本稿ではトレンド(自然失業率)や不規則要素との競合を避けるために、AR(2)過程の特性方程式の固有根が定常かつ指定された偏角の複素根の範囲に入るように、以下のような制限を加えている(Domenech and Gomez (2006))。

$$\phi_1 = 2\rho \cos(\lambda), \quad \phi_2 = -\rho^2$$

$$(0 < \rho < 1, \pi/20 < \lambda < \pi/3) \quad (1.8)$$

## 1.4 フィリップス曲線の確率モデル

循環的変動  $g_t$  が景気循環を表し、インフレ率と連動するということを仮定して、第2節で述べた非線形なフィリップス曲線を以下のように動学モデルとして定式化する。

$$\pi_t = \pi_t^e + \beta g_t / u_t + \varepsilon_t^\pi \quad \varepsilon_t^\pi \sim N(0, \sigma_\pi^2) \quad (1.9)$$

$\varepsilon_t^\pi$  は、期待インフレと循環的変動要因で説明できない残差を表している。係数  $\beta$  は循環的な変動とインフレ率との関係の強さを表す負の係数である。本稿の分析では Domenech and Gomez (2006) に従い、期待インフレ率のモデルとして①適応的期待仮説に基づく新古典派の期待インフレ率モデル、②ニューケインジアン型のフィリップス曲線に基づく期待インフレ率モデルの2つを加重平均したハイブリッド型のモデルを用いる。

### 1.4.1 新古典派の期待インフレ率

新古典派の期待インフレ率のモデルでは、現時点までに利用可能な情報のすべてを利用して今期のインフレ率を予測する Backward Looking な期待形成(労働政策研究・研修機構(2004))

を想定する。本稿では、適応的期待仮説の中でも最も単純な、前期のインフレ率をそのまま予測値とする以下のモデルを用いることとする。

$$\pi_t^e = E_{t-1}[\pi_t] = \pi_t \quad (1.10)$$

#### 1.4.2 ニューケインジアン期待インフレ率

新古典派のフィリップス曲線では価格が伸縮的に調整されることが仮定されており、この仮定が現実に観察される事象と整合的でないことが問題視されていた。ニューケインジアン達は、賃金や価格が硬直的であることが企業の合理的な結果であると仮定したモデルを展開し、期待インフレ率が将来のインフレ率への期待で表現されるような、Forward Looking な期待形成（敦賀・武藤（2007））を取り入れたモデルを導出した（ $\pi_t^e = E_t[\pi_{t+1}]$ ）。このような仮定の下では、期待インフレ率は観測不能な要素となる。本稿では期待インフレ率を未知の状態変数として扱う。期待インフレ率の従う確率モデルに関して、NAIRU のときと同様にその動きが滑らかに変動するものと仮定し、以下のような2次のトレンドモデルを仮定する。

$$\pi_t^* = 2\pi_{t-1}^* - \pi_{t-2}^* + \varepsilon_t^{\pi^*} \quad \varepsilon_t^{\pi^*} \sim N(0, \sigma_{\pi^*}^2) \quad (1.11)$$

#### 1.4.3 ハイブリッド型

Forward Looking な期待形成は合理的なモデルであるが、将来期待形成を考える際には Backward Looking な期待形成も無視できないとする指摘がある（敦賀・武藤（2007））。そこで折衷案として、式（1.10）と式（1.11）の加重平均を期待インフレ率とするモデルを考える。Forward Looking な期待形成の中に Backward Looking な要素を導入することが恣意的であるとの批判もあり、理論の面で弱い部分があるものの、実証研究では良好なパフォーマンスを示すことが報告されている。本稿では、Domenech and Gomez（2006）に従い、このハイブリッド型のモデルを採用することにする。

$$\begin{aligned} \pi_t^e &= \alpha E_{t-1}[\pi_t] + (1-\alpha)E_t[\pi_{t+1}] \\ &= \alpha\pi_t + (1-\alpha)\pi_t^* \quad (0 < \alpha < 1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

### 1.5 状態空間モデルによる表現

前節までに、動学的なフィリップス曲線のモデルを構成する様々な要素を確率モデルの形で表現してきた。本節ではこれらのモデルを状態空間モデルの形に表現し直す。状態空間モデルは時系列解析に現れる様々なモデルを統一的に表現することが可能である。以下では、北川（2005）及び Durbin and Koopman（2001）を参考にしつつ、状態空間モデルの説明を行う。

#### 1.5.1 線形ガウス状態空間モデル

線形ガウス状態空間モデルは以下のような2本の方程式から成る動的なシステムである。

$$y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, H) \quad (1.13)$$

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t \quad \eta_t \sim N(0, Q) \quad (1.14)$$

線形ガウス状態空間モデルは単純なモデルであるものの、多くのシステムを表現することができるため応用範囲は広い。式（1.13）は観測方程式（Observation Equation）と呼ばれ、観測不能な変数  $\alpha_t$  と観測値  $y_t$  とを結び付ける役割を果たしている。

1. 5. 2 状態空間モデルによる表現

前節までで解説した動学的なフィリップス曲線の確率モデルを、以下のような線形状態空間モデルの形で表現することができる。

(1) 観測方程式：

$$\begin{bmatrix} \pi_t - \alpha\pi_{t-1} \\ u_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t^* \\ u_t^* \\ u_{t-1}^* \\ s_t \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ g_t \\ g_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^\pi \\ \varepsilon_t^u \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

(2) 状態方程式：

$$\begin{bmatrix} \pi_t^* \\ \pi_{t-1}^* \\ u_t^* \\ u_{t-1}^* \\ s_t \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ g_t \\ g_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1}^* \\ \pi_{t-2}^* \\ u_{t-1}^* \\ u_{t-2}^* \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ s_{t-3} \\ g_{t-1} \\ g_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{\pi^*} \\ \varepsilon_t^{u^*} \\ \varepsilon_t^s \\ \varepsilon_t^g \\ \eta_t \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

解くべき問題を状態空間モデルの形式で表現できれば、後はカルマンフィルタと平滑化の公式によって状態変数の各成分の推定値を逐次的に効率良く計算することができる。線形ガウス状態空間モデルに対するカルマンフィルタと平滑化の公式については、第 2 章で説明する。

1. 5. 3 推定すべきパラメータ

これまでの議論では、分散共分散行列  $H$  と  $Q$  の成分など、モデル中の各種のパラメータは固定されたものとして扱ってきた。しかしこれらの未知パラメータは推定値で置き換えられる必要がある。今回のモデルでは、以下の合計 10 個のパラメータを推定する必要がある。

- 6つの確率変数の分散： $\sigma_\pi^2, \sigma_u^2, \sigma_{\pi^*}^2, \sigma_{u^*}^2, \sigma_s^2, \sigma_g^2$
- 2次の AR 過程の係数： $\phi_1, \phi_2$
- フィリップス曲線の係数： $\alpha, \beta$

これらは最尤法<sup>ゆゑ</sup>によって推定される。推定方法の詳細については第 2 章で述べる。

## 第2章 カルマンフィルタによる分析

## 2.1 カルマンフィルタと平滑化

第1章では、期待インフレ率と自然失業率を観測不可能な要素とする動学的なフィリップス曲線のモデルを状態空間モデルの形に定式化した。解くべき問題が状態空間モデルの形で表現できれば、後はカルマンフィルタと呼ばれる効率的な計算手法によって、逐次にかつ効率良く、状態変数ベクトルを推定することができる。そして推定した状態変数ベクトルから必要な部分を取り出すことで、NAIRUや季節性などの変動を時系列から自在に抽出することができる。本節では線形状態空間モデルに対するカルマンフィルタと平滑化の漸化式を示し、次節でハイパーパラメータの最尤推定に関する問題について解説する。なお本稿の分析では数値計算の速度を上げ、計算精度を向上させるために様々な工夫を施している（平方根フィルタ、精密な初期カルマンフィルタ等）。これらの数値計算上の様々な工夫については補論で述べている。

## 2.1.1 カルマンフィルタの漸化式

カルマンフィルタは、現在までの観測値に基づく状態ベクトルの条件付の期待値と分散行列を逐次的、効率的に推定することができる漸化式である。1.5.1のように表現される状態空間モデルが与えられたとき、 $n$ 期までの観測値  $Y_t = (y_1, \dots, y_t)$  が所与のときの状態ベクトルの平均  $a_{t+1} = E(\alpha_{t+1} | Y_t)$  とその分散行列  $P_{t+1} = \text{Var}(\alpha_{t+1} | Y_t)$  に関するカルマンフィルタの漸化式は、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 v_t &= y_t - Za_t \\
 F_t &= ZP_tZ^T + H \\
 K_t &= TP_tZ^T F_t^{-1} \\
 L_t &= T - K_tZ \quad (t = 1, \dots, n) \\
 a_{t+1} &= Ta_t + K_tv_t \\
 P_{t+1} &= TP_tL_t^T + RQR^T
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

適当に定めた状態変数ベクトルの初期値  $a_1$ 、 $P_1$  から出発して上記の漸化式を逐次的に用いることで、すべての時点における状態変数ベクトルの期待値と分散行列を効率的に推定することができる。漸化式の導出については、Durbin and Koopman (2001) を参照。

## 2.1.2 平滑化の漸化式

すべての観測値  $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$  が観測された後で改めて状態の推定値  $\hat{a}_t = E(\alpha_{t+1} | Y_t)$  と  $V_t = \text{Var}(\alpha_t | Y_n)$  を推定することを平滑化と呼ぶ。平滑化の漸化式は以下のとおり。

$$\begin{aligned}
 r_{t-1} &= ZF_t^{-1}v_t + L_t^T r_t \\
 N_{t-1} &= Z^T F_t^{-1}Z + L_t^T N_t L_t \\
 \hat{a}_t &= a_t + P_t r_{t-1} \\
 V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t
 \end{aligned} \quad (t = n, \dots, 1) \tag{2.2}$$

漸化式の導出については、Durbin and Koopman (2001) を参照。カルマンフィルタで推定した



$v_t, F_t, K_t, a_t, P_t$ の値を用いて漸化式を最後の時点から逆向きに適用することにより、状態変数ベクトルの平滑化を行うことができる。

## 2.2 最尤法によるハイパーパラメータの推定

これまでの議論は、ハイパーパラメータ  $\Theta = (\sigma_\pi^2, \sigma_u^2, \sigma_{\pi^*}^2, \sigma_{u^*}^2, \sigma_s^2, \sigma_g^2, \phi_1, \phi_2, \alpha, \beta)$  が既知であるという仮定の下で進められてきた。 $\Theta$ は何らかの方法で合理的に決定する必要がある。そこで最尤法で推定することを考える。カルマンフィルタの漸化式の一期先予測誤差  $v_t = y_t - Za_t$ は、平均0、分散  $F_t$ の多変量正規分布に従う (Durbin and Koopman (2001))。よって対数尤度関数  $L(\Theta)$ は以下のように計算される。

$$L(\Theta) = -\frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log |F_t| + v_t^T F_t^{-1} v_t) \quad (2.3)$$

$p$  は観測値ベクトルの次元を表しており、本稿の分析では  $p = 2$  となる。一期先予測誤差はカルマンフィルタの漸化式によって計算できるので、尤度関数を効率的に求めることができる。式(2.3)で表される対数尤度関数を最大化する  $\hat{\Theta}$  がハイパーパラメータの最尤推定値になる。しかし式(2.3)は複雑な非線形の関数であり、その最大値を解析的に求めることは困難であるため、数値計算による非線形最適化によって最尤推定値を求める。本稿では BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 公式による準 Newton 法と線形探索により非線形最適化を行っている (北川 (2005))。

## 2.3 線形状態空間モデルとカルマンフィルタによる分析結果

分析結果を述べる前に、本稿で使用したデータについて説明する。

### (1) 完全失業率

出典：労働力調査 (総務省統計局)

使用データ：四半期 完全失業率 (原数値)

期間：1983年 第I四半期 ~ 2007年 第II四半期

### (2) インフレ率

出典：消費者物価指数 (CPI) (総務省統計局)

使用データ：四半期 消費者物価指数 (生鮮食品を除く総合)

期間：1983年 第I四半期 ~ 2007年 第II四半期

消費者物価指数については、月次データを3か月平均して四半期化し、さらにその前年同期比変化率を計算している。前年同期比の計算で季節性は除かれていると判断し、季節調整は行わない。推定期間中に以下のように消費税の導入と税率上げが行われている。

① 1989年4月：消費税の導入

② 1997年4月：税率を3%から5%へ引き上げ

この影響を受けて消費者物価指数にはレベルシフトがあると考えられるので調整を行う。調整の方法はシンプルで、消費者物価指数の月次系列について、導入及び税率引上げ直前の3月の前年同月比と導入及び税率引上げ直後の4月の前年同月比との伸び率が等しくなるようにしている。その後、3か月ごとに平均をとり、四半期系列に直した。以上の調整方法は、北川・川

崎（2001）を参考にした。伸び率に換算する時点で最初の4期をデータに使うため、時系列の長さは4期分だけ短くなる。

先行研究や他の様々な指標と、本稿の分析による全国の NAIRU 推定結果を比較する。Richardson et al. (2001) では、OECD 加盟国のうち主要な国の年次データを用いて NAIRU を推定している。この結果と本稿の結果（四半期結果を平均して年平均を計算）を比較したものが図1に示してある。これを見ると、本稿の推定結果の方が多少大きめに推定されているものの、上昇と下降の動きは合っており、両者の整合性は取れているといえる。

次に新見（2003）の結果と比較する。この論文では本稿と同様に非線形フィリップス曲線のモデルと状態空間モデルを用いて、我が国の可変 NAIRU の推定を行っている。推定期間は1990年第I四半期から2002年第IV四半期までであり、この期間における平滑化推定値の平均が報告されている。これと本稿の同じ期間の推定値との比較を行う。両者を比較した結果は図2に示してある。これを見るとほぼ同じ値となっており、両者の整合性は取れているといえる。推定結果を時系列のグラフで表したものが図3である。

最後に、日本銀行が公表している短期観測調査（日銀短観）<sup>3</sup>の結果のうち、企業の業況判断 DI<sup>4</sup>と本稿の NAIRU 推定結果とを比較する。業況判断 DI のうち、全産業と雇用見通しの DI を対象にして、本稿のモデルから得られた失業率ギャップ（循環的失業率）と比較を行う。循環的失業率は景気の変動に伴う失業の動きを表しており、これと各種 DI の動きには相関があると考えられる。全産業 DI は企業から見た景気の良し悪しを表現しており、これと失業率ギャップには負の相関があると考えられる。また雇用見通し DI は企業雇用見通しについて「過剰」から「不足」を引いたものであり、失業率ギャップと正の相関があると考えられる。図4を見ると、雇用見通し DI と失業率ギャップとはかなり近い動きをしていることが分かる。本稿の分析では DI に相当する情報は全く利用していないにもかかわらず両者の相関が非常に高いことは大変興味深い。

### 第3章 非線形状態空間モデルとモンテカルロ・フィルタ

#### 3.1 可変パラメータモデルの概要

近年の実証研究によると、フィリップス曲線の係数は時間とともに変化し、曲線自体がフラット化していることが指摘されている（木村 他（2008））。そこで本節ではすべてのハイパーパラメータが時間とともに変動するようなモデルを考える。このモデルにより、以下のような状況をうまく扱うことができるものと期待される。

- ・ NAIRU や季節性などがある時点で急激に変化する場合
- ・ フィリップス曲線の係数が時間とともに変化する場合

#### 3.2 モンテカルロ・フィルタとモンテカルロ平滑化

<sup>3</sup> 「短観」は、全国の企業動向を的確に把握し、金融政策の適切な運営に資することを統計上の目的としており、業況等の現状・先行きに関する判断（判断項目）や、事業計画に関する実績・予測（計数項目）など、企業活動全般に関する調査項目について、全国の調査対象企業に四半期ごとに実施する統計調査（ビジネス・サーベイ）である（日本銀行ホームページ <http://www.boj.or.jp/type/exp/stat/tk/faqtk02.htm> より抜粋）。

<sup>4</sup> 短観で使われている「D.I.」とは、Diffusion Index（ディフュージョン・インデックス）の略で、企業の業況感や設備、雇用人員の過不足などの判断を指数化したものである。「良い」と回答した割合から「悪い」と回答した割合を引くことにより求める。

モンテカルロ・フィルタは Kitagawa (1996) で考案された手法であり、状態変数の分布を 1000 個～1 万個程度の多数の“粒子”によって近似することで、複雑な状態変数の分布を計算する手法である。モンテカルロ・フィルタは乱数の発生とリサンプリング<sup>5</sup> の繰り返しからなる平易なアルゴリズムであり、カルマンフィルタのような大規模かつ大量の行列計算を必要とせず、高次元の非線形・非ガウス状態空間モデルを含む幅広いモデルを扱うことができる。本節ではハイパーパラメータが推定期間中に変化しないという仮定を外し、すべてのハイパーパラメータが時間とともに変動するようなモデルを考える。これらのパラメータを状態変数に含めた非線形状態空間モデルを用いることで、状態ベクトルと同時にハイパーパラメータも推定することができる。これは自己組織化状態空間モデル (Self-organizing State Space Model) と呼ばれる手法である (Kitagawa (1998))。可変パラメータモデルは非線形なモデルであり、線形性を仮定する従来のカルマンフィルタでは推定ができないため、モンテカルロ・フィルタの手法が必要となってくる。本節の説明は、基本的にすべて北川 (2006) の記述によっている。

### 3. 2. 1 モンテカルロ・フィルタの漸化式

北川 (2005) を参考にして、モンテカルロ・フィルタ及び平滑化のアルゴリズムについて以下の節で簡単にまとめる。ここでは以下のような非線形な一般状態空間モデルを考えることとする。

$$\alpha_t = T(\alpha_{t-1}, \eta_t) \quad (3.1)$$

$$y_t = Z(\alpha_t, \varepsilon_t) \quad (3.2)$$

ただし  $y_t$  は観測値の時系列であり、 $\alpha_t$  は状態ベクトルである。またシステムノイズ  $\eta_t$  と観測ノイズ  $\varepsilon_t$  はそれぞれ密度関数  $q(\eta)$  と  $r(\varepsilon)$  に従う多変量の白色ノイズとし、それぞれのノイズのすべての成分は互いに独立であると仮定する。さらに初期状態ベクトル  $\alpha_0$  は分布  $p(\alpha_0)$  に従うとする。(3.2) 式の非線形観測方程式  $y_t = Z(\alpha_t, \varepsilon_t)$  には逆関数が存在すると仮定し、観測値  $y_t$  に対して微分可能な関数  $G$  によって以下のように表されるものとする。

$$\varepsilon_t = G(y_t, \alpha_t) \quad (3.3)$$

本稿の分析では  $G$ 、 $Z$  はそれぞれ以下のようになる。

$$y_t = Z(\alpha_t) + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

$$G(y_t, \alpha_t) = y_t - Z(\alpha_t) \quad (3.5)$$

このとき、モンテカルロ・フィルタ・平滑化のアルゴリズムは以下のようになる。

①  $j = 1, \dots, m$  ( $m$  は粒子の数) について、 $k$  次元の乱数  $f_0^{(j)} \sim p(\alpha_0)$  を生成する。

②  $t = 1, \dots, N$  について、以下の 1)、2) のステップを実行する。

1)  $j = 1, \dots, m$  について、

<sup>5</sup> 一度乱数を発生 (サンプリング) させた後、その発生した乱数の中から特定の確率に比例させて復元抽出を行うことをリサンプリングと呼ぶ。

$l$  次元の乱数  $\eta_t^{(j)} \sim q(\eta)$  を生成する。・・・ (イノベーションのシミュレート)

$p_t^{(j)} = T(f_{t-1}^{(j)}, \eta_t^{(j)})$  を計算する。・・・ (モンテカルロ予測)

$l_t^{(j)} = r(G(y_t, p_t^{(j)})) \left| \frac{\partial G}{\partial y_t} \right|$  を計算する。・・・ (各粒子の“尤度”の計算)

- 2)  $\{p_t^{(1)}, \dots, p_t^{(m)}\}$  から以下のように“尤度”  $\{l_t^{(1)}, \dots, l_t^{(m)}\}$  に比例する確率で  $m$  個の粒子のリサンプリングを行い、 $\{f_t^{(1)}, \dots, f_t^{(m)}\}$  を生成する。  
 ・・・ (モンテカルロ・フィルタ) (3.6)

最初に大量の粒子で初期状態を近似し、データが加わるごとに各粒子の重要度を計算し、重要でない粒子を消滅させ、必要な粒子を重複してサンプリングしていく。こうして分布を適切に近似する粒子が生き残り、状態変数ベクトルの近似値を求めることができる。

### 3.2.2 モンテカルロ平滑化の漸化式

モンテカルロ・フィルタで発生させた過去の粒子を保存することにより、モンテカルロ平滑化を行うことができる。以下では、 $(s_{1t}^{(j)}, \dots, s_{it}^{(j)})^T$  を同時分布  $p(\alpha_1, \dots, \alpha_t | Y_t)^T$  の  $j$  番目の実現値とする。このとき、モンテカルロ・フィルタのステップ ② の 2) を以下のように変更すればよい。

- 2)  $j = 1, \dots, m$  について  $(s_{1t-1}^{(j)}, \dots, s_{it-1}^{(j)}, p_t^{(j)})^T$  を“尤度”  $\{l_t^{(1)}, \dots, l_t^{(m)}\}$  に比例する確率でリサンプリングし、 $(s_{1t}^{(j)}, \dots, s_{it}^{(j)}, s_{it}^{(j)})^T$  を生成する。 (3.7)

リサンプリングの際の抽出確率（重み）はフィルタのときと同じでよいので、新たに計算にかかる負荷は少ない。しかし実際のサンプリング及びリサンプリングは有限個の粒子に対して行われるため、次第にリサンプリングされる粒子が同じものに偏ってゆき、何度もリサンプリングを繰り返すと少数の粒子が集中して抽出され、やがて分布の形が損なわれる可能性がある。上記の方法では  $m$  個の粒子に対して時系列の長さと同じ回数分ものリサンプリングが行われることになる。そこでリサンプリングを行う回数を  $L$  回に制限することで、ラグを  $L$  とする固定ラグ平滑化に相当するアルゴリズムが導かれる。

- 2”)  $j = 1, \dots, m$  について  $(s_{t-Lt}^{(j)}, \dots, s_{t-1t}^{(j)}, p_t^{(j)})^T$  を“尤度”  $\{l_t^{(1)}, \dots, l_t^{(m)}\}$  に比例する確率でリサンプリングし、 $(s_{t-Lt}^{(j)}, \dots, s_{t-1t}^{(j)}, s_{t-1t}^{(j)})^T$  を生成する。 (3.8)

ラグをあまり大きくとり過ぎると、リサンプリングの繰り返しによって分布の形が次第に損なわれるため、ラグは多くても 30 程度にする方が良いとされている（北川 (2005)）。本稿の分析では PC のメモリの制限もあり、ラグを 15 に設定している。

### 3.3 自己組織化モデルの概要

モンテカルロ・フィルタでは、予測分布のモンテカルロ近似により対数尤度の近似値を求めることができる。この尤度の推定値を用いた最尤法により、通常のカルマンフィルタの場合と同様にハイパーパラメータの推定を行うことができる。ただし、このようにして求めた尤度はモンテカルロ近似による誤差を含んでいるため、尤度関数の曲面が滑らかでなく、Newton 法のように微分を必要とする最適化の手法の適用が困難であることが知られている（矢野・佐藤

(2007))。Kitagawa (1998) で提案された自己組織化モデルでは、ハイパーパラメータを既知の定数ではなく未知の状態変数として扱う。例えばイノベーションの分散をハイパーパラメータとしたとき、これを以下のように状態ベクトルに取り込んで推定を行う。

$$\alpha_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^m, \log(\sigma_1^2), \dots, \log(\sigma_k^2))^T \tag{3.9}$$

これを自己組織化モデル (Self-organizing State Space model) と呼ぶ。自己組織化モデルでは状態変数ベクトルがハイパーパラメータを含むように拡張されているため、状態ベクトルの推定を行うだけでハイパーパラメータも同時に推定することができる。ハイパーパラメータの事前分布にランダムウォークなどの確率的な構造を仮定することで、ハイパーパラメータが時間とともに変動するようなモデルも推定することができる。自己組織化モデルでは観測方程式が複雑な非線形モデルとなるため、モデルに線形性を仮定する通常のカルマンフィルタの手法を用いることはできず、モンテカルロ・フィルタ等の手法が必要になる。本稿ではすべてのハイパーパラメータがランダムウォークに従って変動すると仮定して、以下のモデルにより時変パラメータとしての推定を行う。

$$\log(\sigma_{t+1,i}^2) = \log(\sigma_{t,i}^2) + \varepsilon_{t,i} \quad \varepsilon_{t,i} \sim N(0, \tau_{t,i}^2) \tag{3.10}$$

分散は非負の制約があるが、上記のように対数をとったものを考えることで、この制約なしに推定を行うことができる。なお、上記のモデル中の  $\tau_{t,i}^2$  のように、ハイパーパラメータの動きを制御するパラメータをハイパーハイパーパラメータ (Hyper-hyper parameter) と呼ぶ (樋口 (1996))。自己組織化モデルにより定式化し直した非線形状態空間モデルについて、以下にその具体的な形を示しておく。新たな自己組織化状態空間モデルの状態の次元は 19 とかなり大きいものの、モデル中の行列はほとんどの成分が 0 であり、計算の負荷はそれほど増大しない。

(1) 観測方程式 :

$$\begin{bmatrix} \pi_t - \alpha\pi_{t-1} \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\pi_t^* + \beta g_t \\ u_t^* + s_t + g_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^\pi \\ \varepsilon_t^u \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

(2) 状態方程式 :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t+1,1} \\ \alpha_{t+1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t,1} \\ \alpha_{t,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t,1} \\ \varepsilon_{t,2} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

式 (3.11) 及び式 (3.12) 中のベクトルや行列の成分については以下のとおりである。

$$\alpha_{t,1} = \begin{bmatrix} \pi_t^* \\ \pi_{t-1}^* \\ u_t^* \\ u_{t-1}^* \\ s_t \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ g_t \\ g_{t-1} \end{bmatrix} \quad T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\rho \cos(\lambda) & -\rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{t,1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{\pi^*} \\ \varepsilon_t^{u^*} \\ \varepsilon_t^s \\ \varepsilon_t^g \end{bmatrix} \quad \text{Var} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{\pi^*} \\ \varepsilon_t^{u^*} \\ \varepsilon_t^s \\ \varepsilon_t^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\pi^*}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{u^*}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_g^2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{t,2} = \begin{bmatrix} \log(\sigma_{\pi}^2) \\ \log(\sigma_u^2) \\ \log(\sigma_{\pi^*}^2) \\ \log(\sigma_{u^*}^2) \\ \log(\sigma_s^2) \\ \log(\sigma_g^2) \\ \rho \\ \lambda \\ \log(\alpha) \\ \log(-\beta) \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{t,2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{\sigma_{\pi}} \\ \varepsilon_t^{\sigma_u} \\ \varepsilon_t^{\sigma_{\pi^*}} \\ \varepsilon_t^{\sigma_{u^*}} \\ \varepsilon_t^{\sigma_s} \\ \varepsilon_t^{\sigma_g} \\ \varepsilon_t^{\rho} \\ \varepsilon_t^{\lambda} \\ \varepsilon_t^{\alpha} \\ \varepsilon_t^{\beta} \end{bmatrix} \quad \text{Var} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{\sigma_{\pi}} \\ \varepsilon_t^{\sigma_u} \\ \varepsilon_t^{\sigma_{\pi^*}} \\ \varepsilon_t^{\sigma_{u^*}} \\ \varepsilon_t^{\sigma_s} \\ \varepsilon_t^{\sigma_g} \\ \varepsilon_t^{\rho} \\ \varepsilon_t^{\lambda} \\ \varepsilon_t^{\alpha} \\ \varepsilon_t^{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\sigma_{\pi}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\sigma_u}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{\beta}^2 \end{bmatrix}$$

### 3.4 非線形状態空間モデルとモンテカルロ・フィルタによる分析結果

本稿の自己組織化モデルを Salford FORTRAN コンパイラを用いてプログラミングし、インテル(R) Celeron(R) M1.40GHz プロセッサ搭載の PC (IBM ThinkPad) で計算したところ、1 回の推定で約 87 秒の時間が掛かった。結果は図 5 に示してある。

まずカルマンフィルタによる推定値との比較を試みる。結果 (全国のみ) は図 6 に示してある。どの地域の推定結果を見ても、カルマンフィルタとモンテカルロ・フィルタの結果は非常に似通っている。ただしモンテカルロ・フィルタで推定した NAIRU の方が、若干変動が大きくなっている。これは固定区間平滑化ではなくラグ 15 の固定ラグ平滑化を行っているため、推定結果がフィルタリングの値に若干近い動きをしていることが原因であると考えられる。NAIRU 以外の季節変動や循環変動といった要素についても NAIRU と同様、カルマンフィルタによる推定値との顕著な違いは見られない。可変ハイパーパラメータの推定結果 (全国のみ) については図 7 に示している。地域別の循環的失業率とインフレ率を結ぶ係数  $\beta$  の推定結果は、90 年代後半から一貫して 0 に近づく結果となった。これは失業とインフレのトレードオフの関係が近年緩やかに弱まってきていることを示唆している。

おわりに

今回の分析では、例えば NAIRU のモデルでの次数選択 (2 次のトレンドモデルを使用) 等に関して、あらかじめモデルを 1 つに決めて推定を行っている。しかし、より当てはまりの良いモデルがある可能性もあり、情報量基準で複数のモデルを比較する必要がある。さらに雇用政策が実施された時期についてダミー変数を入れることで、政策のインパクトの測定を行うことができると期待される。また期待インフレ率について、カールソン・パーキン法の導入も考えることができる。GDP ギャップと失業率ギャップの間の相関に関するオークンの法則をモデルとして定式化し、導入することも可能である。

## (補論) 数値計算に関する技術的な工夫

## 1 平方根フィルタと平方根平滑化

カルマンフィルタの計算では行列の乗算等を何度も繰り返すため、丸め誤差が大きくなり分散共分散行列が負値定符号となる可能性がある。この問題はカルマンフィルタと同値でより安定的な平方根フィルタ (Square Root Filter) と呼ばれるアルゴリズムで対処できる (Durbin and Koopman (2001))。これは状態ベクトルの分散共分散行列を直交変換によって下三角行列の平方の形に変換し ( $P_t = \tilde{P}_t \tilde{P}_t^T$ )、この三角行列を逐次更新していくアルゴリズムである。三角行列の平方は必ず正値対称行列となるので数値計算上の困難は生じない。しかし通常のカルマンフィルタと比較して計算量はかなり多くなる。以下で、分散行列の平方根形式を導出する。記号の意味は第 2 章のものと同じである。分割行列  $U_t$  を次のように定義する。

$$U_t = \left[ \begin{array}{c|c|c} Z\tilde{P}_t & \tilde{H} & 0 \\ \hline \tilde{TP}_t & 0 & R\tilde{Q} \end{array} \right] \quad (4.1)$$

ここで、 $P_t = \tilde{P}_t \tilde{P}_t^T$ 、 $H = \tilde{H} \tilde{H}^T$ 、 $Q = \tilde{Q} \tilde{Q}^T$  である。分割行列  $U_t$  は Householder 変換<sup>6</sup> などの適当な直交変換行列  $G$  を右から掛けることによって、列の数が行の数を上回るような下三角行列  $U_t^*$  へと変換できる。下三角行列  $U_t^*$  は分割行列  $U_t$  と同じ次元を持ち、以下のように表現できる。

$$U_t^* = \left[ \begin{array}{c|c|c} U_{1,t}^* & 0 & 0 \\ \hline U_{2,t}^* & U_{3,t}^* & 0 \end{array} \right] \quad (4.2)$$

ここで  $U_{1,t}^*$  と  $U_{3,t}^*$  は下三角行列である。式 (4.1) 及び式 (4.2) から、下三角行列  $U_t^*$  の平方を以下のように 2 通りに表現できる。

$$U_t^* U_t^{*T} = \left[ \begin{array}{c|c} U_{1,t}^* U_{1,t}^{*T} & U_{1,t}^* U_{2,t}^{*T} \\ \hline U_{2,t}^* U_{1,t}^{*T} & U_{2,t}^* U_{2,t}^{*T} + U_{3,t}^* U_{3,t}^{*T} \end{array} \right] \quad (4.3)$$

$$U_t^* U_t^{*T} = U_t G G^T U_t^T = U_t U_t^T = \left[ \begin{array}{c|c} F_t & Z P_t T^T \\ \hline T P_t Z^T & T P_t T^T + R Q R^T \end{array} \right]$$

これらの式から、以下の結果を得る。

$$U_{1,t}^* = \tilde{F}_t \quad (4.4)$$

$$U_{2,t}^* = T P_t Z^T \tilde{F}_t^{-T} = K_t \tilde{F}_t \quad (4.5)$$

ここで  $\tilde{F}_t$  は  $F_t = \tilde{F}_t \tilde{F}_t^T$  となる下三角行列である。なお上記の計算では、第 2 章のカルマンフィルタの漸化式に関する公式を利用している。また、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} U_{3,t}^* U_{3,t}^{*T} &= T P_t T^T + R Q R^T - U_{2,t}^* U_{2,t}^{*T} \\ &= T P_t T^T + R Q R^T - K_t F_t K_t^T = P_{t+1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

<sup>6</sup> 行列を直交行列と三角行列の積に分解する方法はQR分解と呼ばれ、これには様々な手法がある。このうち鏡像変換と呼ばれる変換によりQR分解を行うのがHouseholder変換である。他にもGivens回転などの手法がある。

したがって (4.1) 式から (4.2) 式へと下三角変換を行い、得られた下三角行列と (4.4) 式～(4.6) 式を用いて再び (4.1) 式を構成することを繰り返せば、カルマンフィルタの計算に必要な要素を逐次的に計算できる。このようにして構成されたフィルタの漸化式を平方根フィルタと呼ぶ。Householder 変換の数値計算のプログラミングについては、森 (1987) を参考にした。

## 2 平方根平滑化

基本平滑化方程式の  $N_{t-1}$  に対する後ろ向き漸化式 (2.2) に対しても、平方根形式の公式を導くことができる。それには前述の平方根フィルタのアウトプットを用いて以下のような分割行列  $\tilde{N}_t^*$  を作成し、Householder 変換によって下三角行列に変換すればよい。

$$\tilde{N}_t^* = [ Z^T U_{1,t}^{*-T} \mid L_t^T \tilde{N}_t ] \quad (4.7)$$

$$\tilde{N}_t^* G = [\tilde{N}_{t-1} \mid 0] \quad (4.8)$$

(4.7) 式及び (4.8) 式の二乗を比較し、 $N_{t-1}$  に対する後ろ向き漸化式 (2.2) を適用することで、 $N_{t-1}$  の平方根形式  $\tilde{N}_{t-1}$  の更新式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{N}_t^* G G^T \tilde{N}_t^{*T} &= \tilde{N}_t^* \tilde{N}_t^{*T} \\ &= Z^T F_t^{-1} Z + L_t^T N_t L_t = N_{t-1} = \tilde{N}_{t-1} \tilde{N}_{t-1}^T \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 3 精密な初期カルマンフィルタ

カルマンフィルタの計算を行うためには、初期状態ベクトル  $\alpha_1$  とその初期分散行列  $P_1$  を定める必要がある。本稿では事前情報が無い状況を厳密に表現するために、精密な初期カルマンフィルタ (Exact Initial Kalman Filter) と呼ばれる手法を用いて初期状態を求めている。精密な初期カルマンフィルタでは初期状態の分散行列を以下のように設定する。

$$\alpha_1 = a + A\delta + R_0\eta_0 \quad \eta_0 \sim N(0, Q_0) \quad \delta \sim N(0, kI)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$Q_0$  は、以下に示すような行列方程式の解として求められる行列である (Durbin (2002))。

$$(I - T_0 \otimes T_0) \text{vec}(Q_0) = \text{vec}(R_1 R_1^T)$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$\text{vec}$  は、行列の各列ベクトルを第1列から順に1列に並べて列ベクトルに変換する作用素である。 $\otimes$  はクロネッカー積である。 $a$  は通常0ベクトルにする。このとき初期状態の分散を以下



のように  $k$  に依存する部分とそうでない部分に分けて表現する。

$$P_1 = kP_\infty + P_* \quad (4.12)$$

ここで  $P_\infty = AA^T$ 、 $P_* = R_0R_0^T$  である。そして関連する行列を  $k$  に関してべき乗に展開して  $k \rightarrow \infty$  とすることで主要な項のみが残り、以下のような漸化式を構成することができる。精密なカルマンフィルタの詳細については Durbin and Koopman (2001) 又は Peng and Aston (2006) を参照。

[1]  $F_t^{(0)}$  の計算 :

$$F_t^{(0)} = Z_t P_{\infty,t} Z_t^T \quad (4.13)$$

[2.1]  $F_t^{(0)}$  が非特異のとき ( $P_{\infty,t} Z_t^T \neq 0$  のとき) :

$$\begin{aligned} F_t^{(1)} &= (Z_t P_{\infty,t} Z_t^T)^{-1} \\ F_t^{(2)} &= -F_t^{(1)} (Z P_{*,t} Z^T + H)^{-1} F_t^{(1)} \\ K_t^{(1)} &= T P_{\infty,t} Z^T F_t^{(1)} \\ K_t^{(2)} &= T (P_{*,t} Z^T F_t^{(1)} + P_{\infty,t} Z^T F_t^{(2)}) \\ L_t^{(1)} &= T - K_t^{(1)} Z^T \\ L_t^{(2)} &= -K_t^{(2)} Z^T \\ P_{*,t+1} &= T P_{\infty,t} L_t^{(2)T} + T P_{*,t} L_t^{(1)T} + R Q R^T \\ P_{\infty,t+1} &= T P_{\infty,t} L_t^{(1)T} \end{aligned} \quad (4.14)$$

[2.2]  $P_{\infty,t} Z_t^T = 0$  のとき :

$$\begin{aligned} F_t^{(1)} &= Z P_{*,t} Z^T + H \\ K_t^{(1)} &= T P_{*,t} Z^T F_t^{(1)} \\ L_t^{(1)} &= T - K_t^{(1)} Z^T \\ P_{*,t+1} &= T P_{*,t} L_t^{(1)T} + R Q R^T \\ P_{\infty,t+1} &= T P_{\infty,t} T^T \end{aligned} \quad (4.15)$$

[3]  $a_t^{(0)}$  の計算 :

$$\begin{aligned} v_t^{(0)} &= y_t - Z a_t^{(0)} \\ a_{t+1}^{(0)} &= T a_t^{(0)} + K_t v_t^{(0)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここで  $a_0^{(0)} = a$  として計算を開始する。 $F_t^{(0)}$  が非特異か否かに従い、上記の式のうち [2.1] や [2.2] を使い分けることになる。多くの時系列では、精密な初期カルマンフィルタをしばらく実行すると、 $P_\infty$  が 0 になり、この時点における  $a_t^{(0)}$  及び  $P_*$  を初期値とすればよい。

散漫な状態ベクトルを用いて初期状態を精密に計算していることに対応して、最尤法には次のような散漫な対数尤度 (Defuse Likelihood (Durbin and Koopman (2001))) を用いている。

$$\log L_d(y) = -\frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^d w_t - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^n (\log |F_t| + v_t^T F_t^{-1} v_t) \quad (4.17)$$

ここで  $1, \dots, d$  に対して、

$$w_t \begin{cases} = \log |F_t^{(1)}| & F_t^{(0)} \text{ が正値定符号のとき} \\ = \log |F_t^{(2)} + v_t^{(0)} F_t^{(2)-1} v_t^{(0)T}| & F_t^{(0)} = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.18)$$

である。散漫対数尤度を用いることで、初期状態ベクトルの成分中に散漫な要素がある場合でも、パラメータの最尤推定を行うことができる。

#### 4 多変量系列の一変量化

精密な初期カルマンフィルタを実行中に行列  $F_t^{(0)}$  のランクが変動して特異行列になり、 $F_t^{(0)}$  の逆行列の計算ができなくなる場合がある。このような計算上の困難を避ける方法として、観測値ベクトルの成分を1つずつ更新する一変量化の方法がある (Durbin and Koopman (2001)、片山 (2000))。まず式 (3.4) で観測値  $y_t$  と攪乱項ベクトル  $\varepsilon_t$  を次のように書き直す。

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{t,1} \\ y_{t,2} \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \text{Var}(Z) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

次にモデルを一変量で表したときの状態方程式、条件付期待値などを以下のように定義する。

$$\begin{aligned} y_{t,i} &= Z_i \alpha_{t,i} + \varepsilon_{t,i} & (i=1,2, t=1, \dots, n) \\ \alpha_{t,i+1} &= \alpha_{t,i} & (i=1,2) \\ \alpha_{t+1,1} &= T \alpha_{t,3} + R \eta_t & (t=1, \dots, n) \\ \alpha_{1,1} &= \alpha_1 \sim N(a_1 | P_1) \\ \alpha_{t,1} &= E(\alpha_{t,1} | Y_{t-1}) & \alpha_{t,i} = E(\alpha_{t,i} | Y_{t-1}, y_{t,1}) \\ P_{t,1} &= \text{Var}(\alpha_{t,1} | Y_{t-1}) & P_{t,i} = \text{Var}(\alpha_{t,i} | Y_{t-1}, y_{t,1}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

このとき、観測値ベクトルを成分ごとに分けて  $y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,1}, \dots, y_{n,2}$  というスカラーの系列とみなすと、カルマンフィルタの漸化式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
v_{t,i} &= y_{t,i} - Z_i a_{t,i} \\
F_{t,i} &= Z_i P_{t,i} Z_i^T + \sigma_{t,i}^2 \\
K_{t,i} &= T_i P_i Z_i^T F_{t,i}^{-1} \\
L_t &= T - K_t Z \\
a_{t,i+1} &= a_{t,i} + K_{t,i} v_{t,i} \\
P_{t,i+1} &= P_{t,i} - K_{t,i} F_{t,i} K_{t,i}^T \\
a_{t+1} &= a_{t+1,1} = T a_{t,3} \\
P_{t+1} &= P_{t+1,1} = T P_{t,3} T^T + R Q R^T
\end{aligned} \tag{4.21}$$

成分を 1 つずつ更新するため、計算のステップは増えるものの、 $K_{t,i}$  や  $v_{t,i}$  がベクトルやスカラーになるために全体としての計算量は減る。行列  $F_t^{(0)}$  は常にスカラーとなり、0 又は正の値しかとらないため、精密な初期カルマンフィルタが利用できる。ただし一変量化に合わせて公式を修正する必要がある。詳細については Koopman and Durbin (1998) を参照。

## 5 メルセンヌツイスタによる乱数発生

モンテカルロ・フィルタでは数十万～数百万もの良質かつ大量の乱数を高速に生成する必要があり、性能の良い乱数生成アルゴリズムを必要とする。本稿では乱数生成のアルゴリズムとして、近年よく利用されているメルセンヌツイスタ (Mersenne Twister) を用いている (Matsumoto and Nishimura (1998))。メルセンヌツイスタは周期が  $2^{19937} - 1$  ( $\approx 10^{6000}$ ) とかなり長く、計算速度も速いことで知られている。メルセンヌツイスタのホームページにメルセ FORTRAN バージョンのプログラムが収録されており、本稿の分析では、これを利用している。

図1 先行研究との比較①  
(OECD Outlook 2001 より抜粋)

	1980	1985	1990	1995	1999	Standard errors <sup>1</sup>						
						Average	Final year					
Australia	5.1	6.0	6.5	7.1	6.8	1.0	1.6					
Austria	1.9	3.2	4.6	5.0	4.9	0.2	0.3					
Italy	6.8	7.8	9.1	10.0	10.4	0.8	1.1					
<u>Japan</u>	<u>1.9</u>	<u>2.7</u>	<u>2.2</u>	<u>2.9</u>	<u>4.0</u>	0.2	0.3					
本稿推定結果	→ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>2.8</td> <td>2.6</td> <td>3.1</td> <td>4.3</td> </tr> </table>					2.8	2.6	3.1	4.3	← 若干大きめに推定されている		
2.8	2.6	3.1	4.3									

図2 先行研究との比較②  
(新見 (2003) より抜粋)

第2-2表 最近の主なNAIRUの推計例

	NAIRUの値	関数の失業率	関数の形式
新美(2003)	3.15%(3.24%) (1975年第1四半期～2002年第4四半期) (注8) 3.04%(2.97%) (1980年第1四半期～1989年第4四半期) (注8) <u>3.18%(3.44%) (1990年第1四半期～2002年第4四半期) (注8)</u>	非線形、線形 (NAIRUの値は非線形ケース)	可変NAIRU (フィリップス曲線)

(注8) 非線形モデルのフィルタリング推定値、( )はスムージング推定値

本稿推定結果: **3.50%**  
(1990 I ~ 2002IV のスムージング(平滑化)推定値の平均)  
← ほぼ等しい結果

図 3 カルマンフィルタによる推定結果

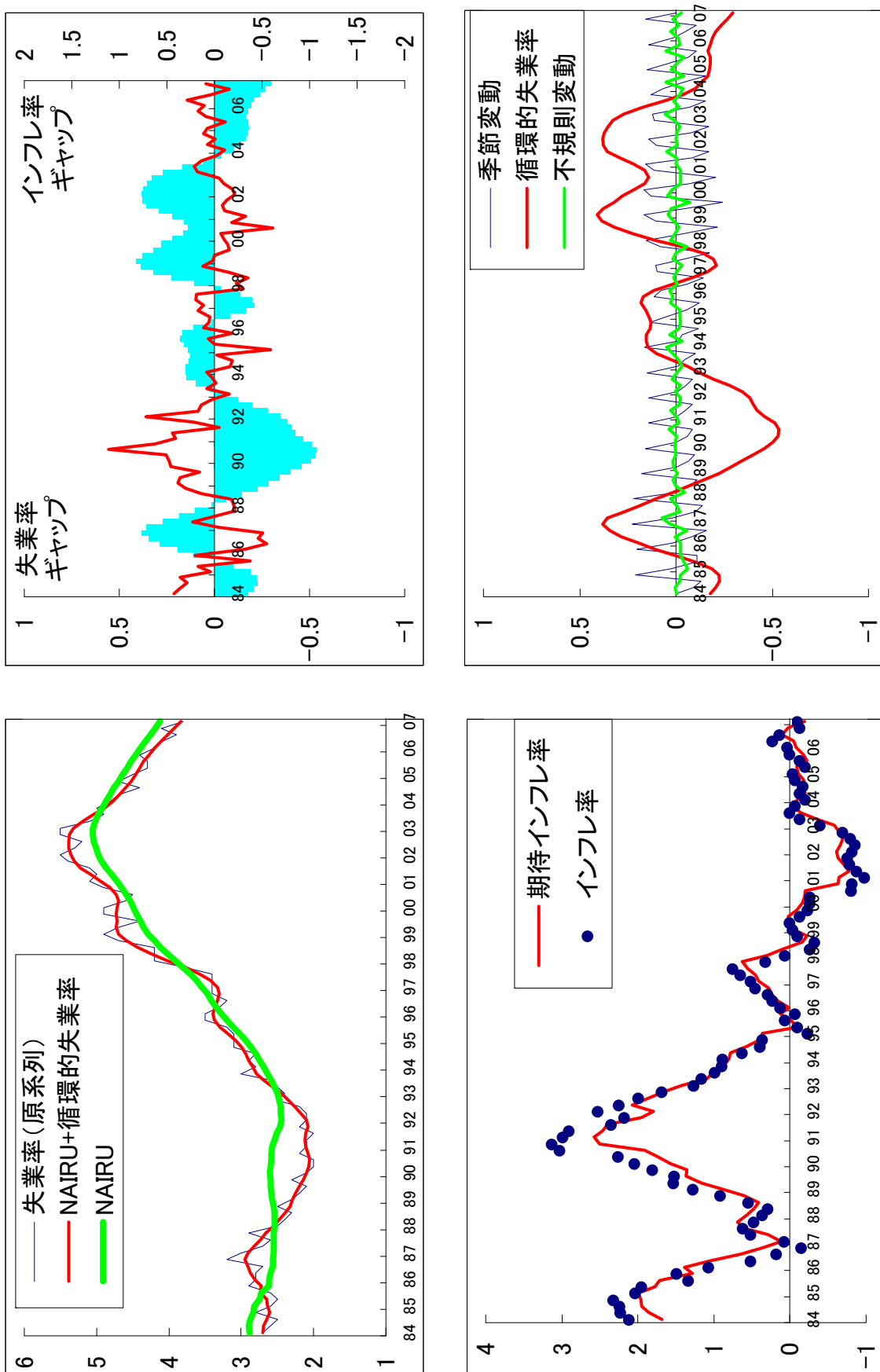


図4 日銀短観との比較

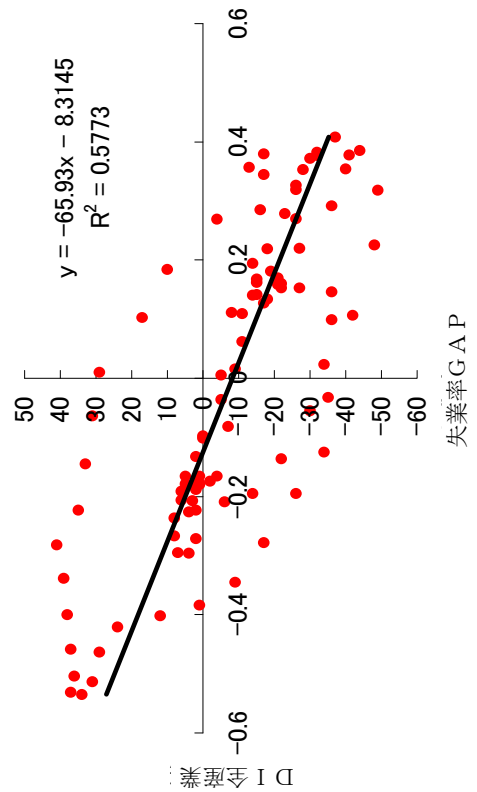
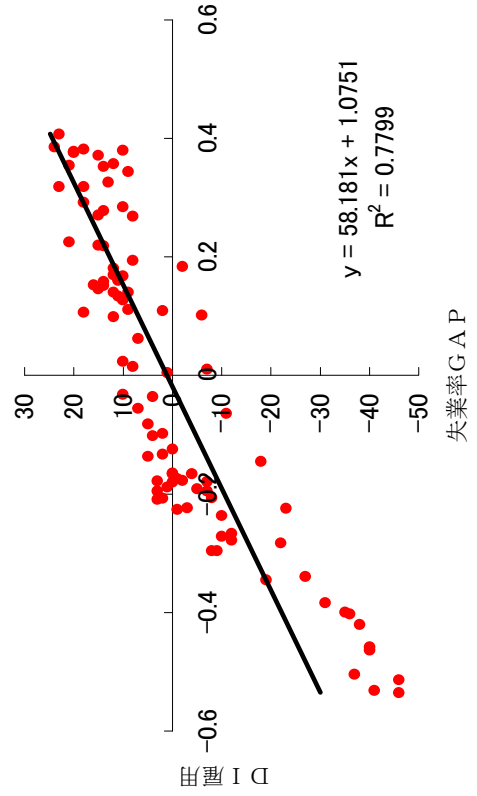
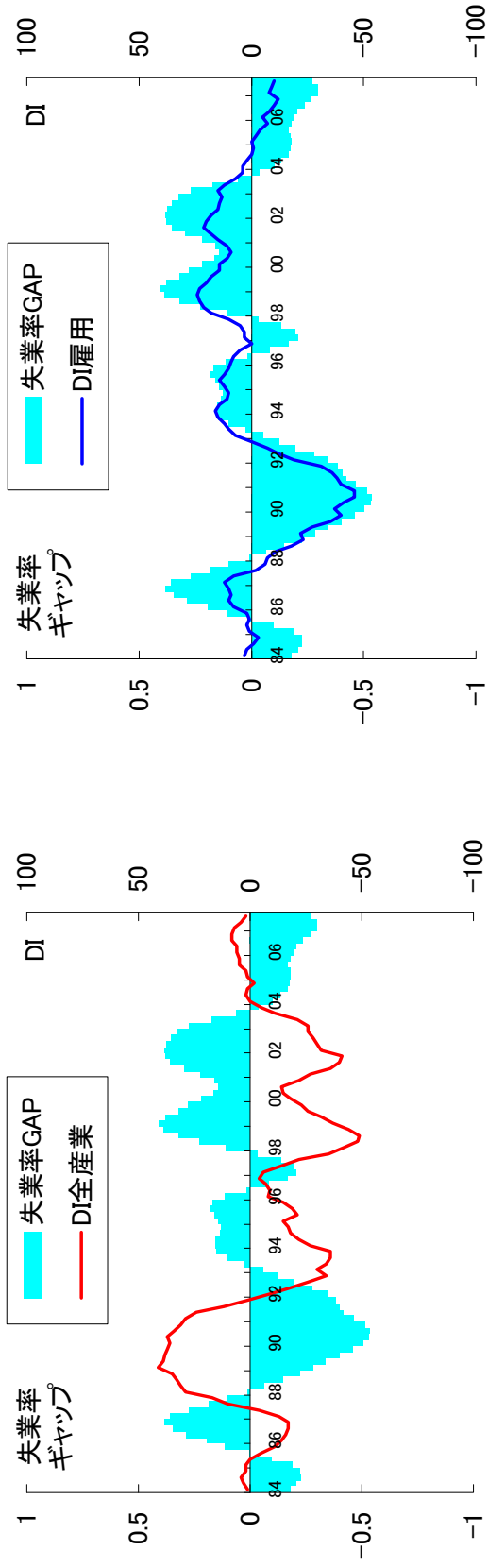


図5 モンテカルロ・フィルタによる推定結果

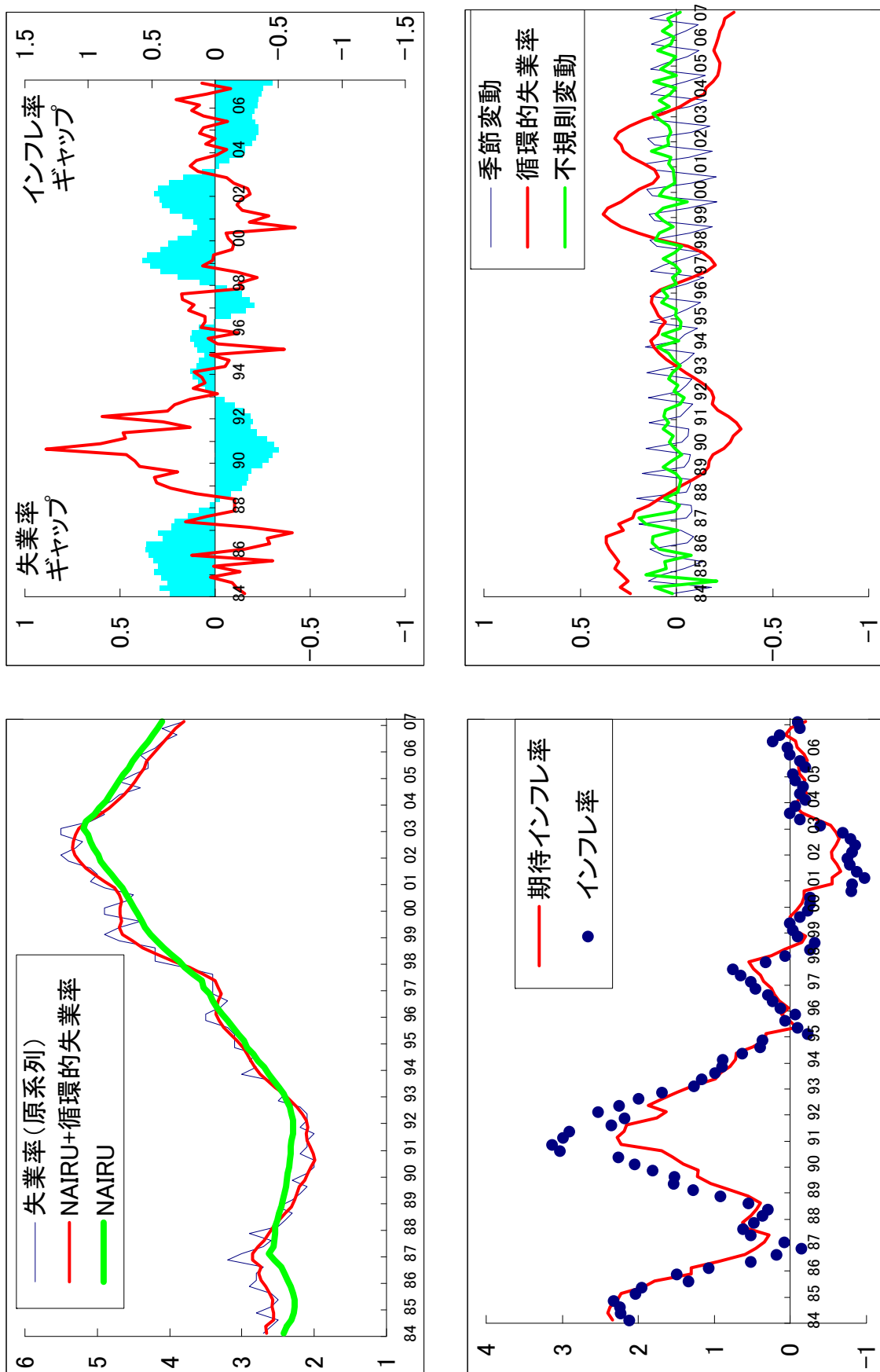
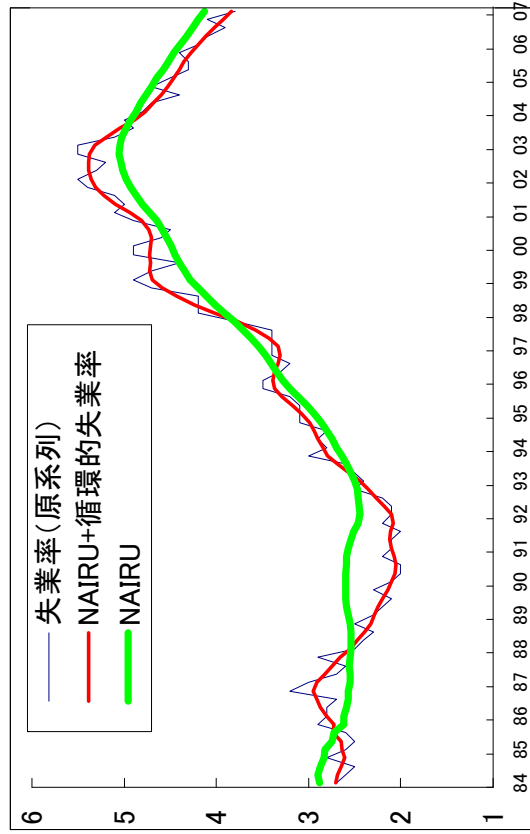


図6 カルマンフィルタと  
モンテカルロ・フィルタの比較

### カルマンフィルタの結果



### モンテカルロ・フィルタの結果

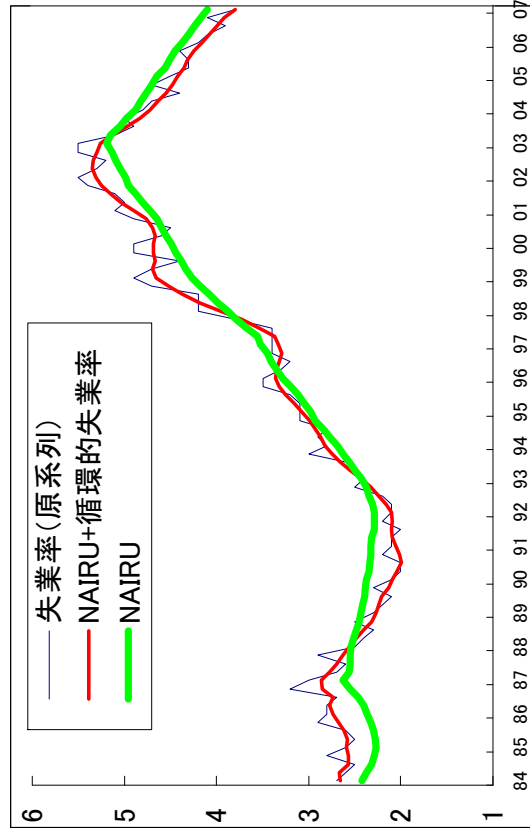
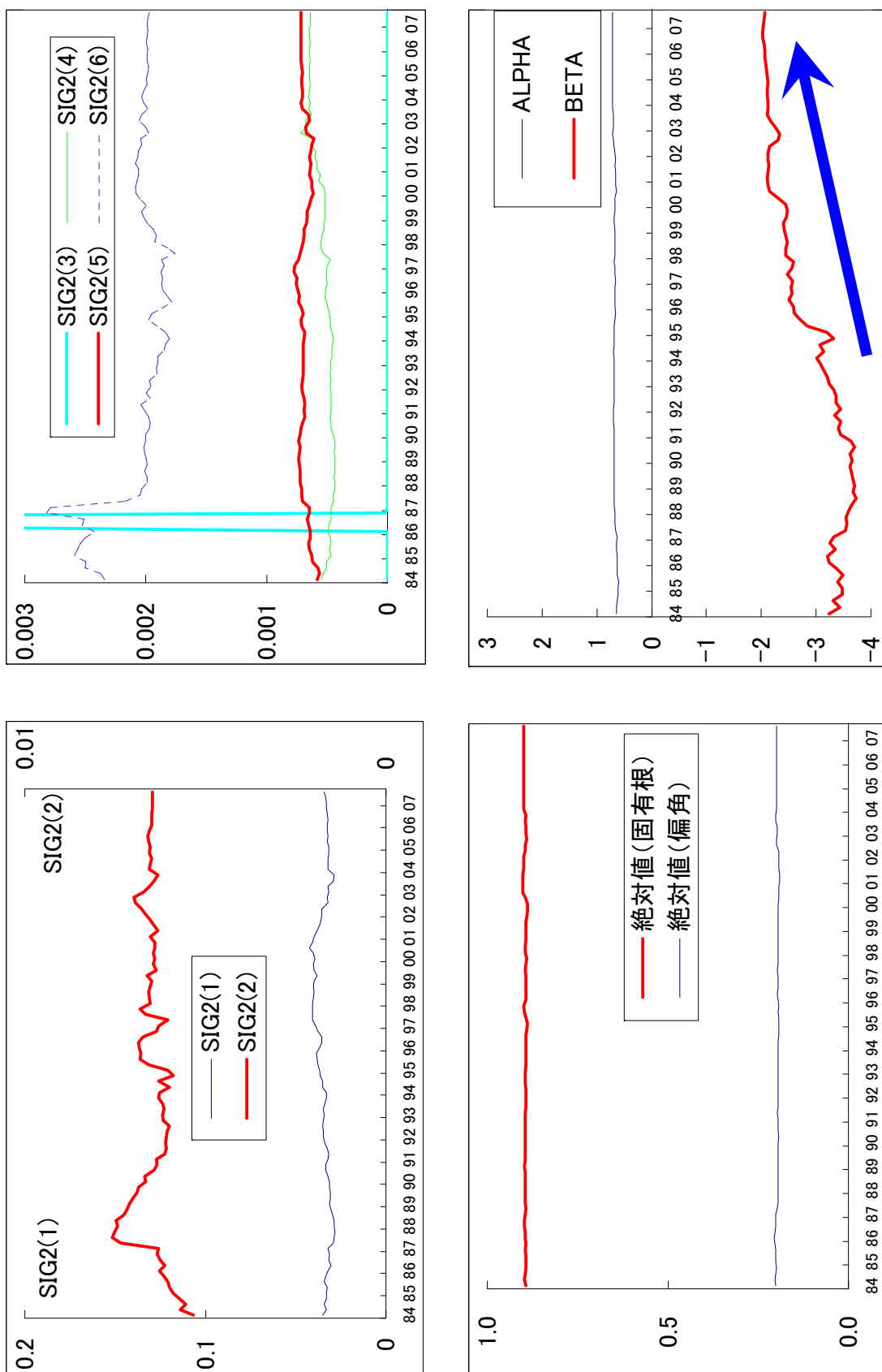




図 7 モンテカルロ・フィルタによる  
ハイパーパラメータの推定結果



付録:

本稿の分析で使用したカルマンフィルタとモンテカルロ・フィルタのプログラムの主要な部分

```

C-----
SUBROUTINE MCFILT(UNEMP, CP12, PP, XFO, VFO, FRES, SRES, HHP, STD, DLLK, LN, NP, NS, MN, NN, NSIG,
$              LAG, IMSM, TIME)

C
C ... FILTERING AND SMOOTHING BY MONTE CARLO FILTER ...
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
PARAMETER(NS1 = 9, NP1 = 10, MN1 = 10000, LAG1 = 15)
DIMENSION UNEMP(LN), CP12(LN), PP(NP), HHP(NP), XFO(NS), VFO(NS), FRES(NS + NP, LN - NN)
DIMENSION SRES(NS + NP, LN - NN), STD(LN - NN), WRK(LAG1, MN1, NS1 + NP1), TEMP(LAG1, MN1, NS1 + NP1)
DIMENSION TEMP2(MN1, NS1 + NP1), DUM(MN1), INDX(MN1), FLT(MN1, NS1 + NP1), PRD(MN1, NS1 + NP1), CUM(MN1)

C
DO 30 I = 1, MN
  DO 10 J = 1, NS
    STD = SQRT(VFO(J))
    FLT(I, J) = XFO(J) + STD*RGAUSS()
  10 CONTINUE
  DO 20 J = 1, NP
    FLT(I, NS + J) = GUNIF(PP(J) - 1.0D0, PP(J) + 1.0D0)
  20 CONTINUE
  30 CONTINUE

C
  DLLK = 0.0D0
  DO 2000 II = 1, LN - NN

C
C ... MONTE CARLO PREDICTION & MONTE CARLO FILTERING...
C
  CALL MCPRED(PRD, FLT, HHP, MN, NS, NP, NSIG)
  CALL WEIGHT(UNEMP(II + NN), CP12(II + NN), PRD, CUM, TEMP2, FTEM, MN, NS, NP, NSIG)

C
C----- RESAMPLING -----
CALL RESMPL(PRD, CUM, FLT, MN, NS + NP, 1)
C-----

C
  DLLK = DLLK + LOG(FTEM)
  DO 50 J = 1, NS + NP
    CALL MOMENT(FLT, INDX, DUM, MN, NS + NP, J, DMEAN, STD, DMED)
    FRES(J, II) = DMEAN
  50 CONTINUE

C
  IF (IMSM .EQ. 0) GO TO 1500

C
C ... MONTE CARLO SMOOTHING ...
C
  IF (II .EQ. 1) THEN
    DO 120 J = 1, MN
      DO 100 K = 1, NS + NP
        WRK(LAG, J, K) = FLT(J, K)
      100 CONTINUE
    120 CONTINUE
  ELSE
    DO 300 K = 1, MN
      DO 205 L = 1, NS + NP
        DO 200 J = 1, LAG - 1
          TEMP(J, K, L) = WRK(J + 1, K, L)
        200 CONTINUE
        TEMP(LAG, K, L) = PRD(K, L)
      205 CONTINUE
    300 CONTINUE

C
C----- RESAMPLING -----
CALL RESMPL(TEMP, CUM, WRK, MN, NS + NP, LAG)
C-----

C
  IF (II .GE. LAG) THEN
    DO 265 J = 1, MN
      DO 260 K = 1, NS + NP
        TEMP2(J, K) = WRK(1, J, K)
      260 CONTINUE
    265 CONTINUE
    DO 270 J = 1, NS + NP
      CALL MOMENT(TEMP2, INDX, DUM, MN, NS + NP, J, DMEAN, STD, DMED)
  
```

```

                SRES(J, I1 - LAG + 1) = DMEAN
                STD(I1) = STD
270          CONTINUE
          END IF
          IF (I1 .EQ. LN - NN) THEN
            DO 295 J = 1, LAG
              DO 290 K = 1, MN
                DO 285 L = 1, NS + NP
                  TEMP2(K, L) = WRK(LAG - J + 1, K, L)
285          CONTINUE
290          CONTINUE
              DO 292 K = 1, NS + NP
                CALL MOMENT(TEMP2, INDX, DUM, MN, NS + NP, K, DMEAN, STD, DMED)
                SRES(K, LN - NN - J + 1) = DMEAN
                STD(I1) = STD
292          CONTINUE
295          CONTINUE
          END IF
        END IF

1500    CONTINUE
C
2000    CONTINUE
C
        RETURN
        END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE MCPRED(PRD, FLT, HHP, MN, NS, NP, NSIG)
C
C ... PREDICTION OF EACH COMPONENT ...
C
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
        PARAMETER(NP1 = 10, NSIG1 = 6)
        DIMENSION FLT(MN, NS + NP), PRD(MN, NS + NP), PP(NP1), HHP(NP), SIG2(NSIG1), AR(2)
C
        DO 1000 I = 1, MN
C
                DO 100 J = 1, NP
                    PP(J) = FLT(I, NS + J)
100          CONTINUE
C
                CALL TRANSP(PP, NP, NSIG, SIG2, AR, ALPHA, BETA, RDS, RAM)
C
                PRD(I, 1) = 2.0D0*FLT(I, 1) - FLT(I, 2)
                PRD(I, 2) = FLT(I, 1)
                PRD(I, 3) = 2.0D0*FLT(I, 3) - FLT(I, 4)
                PRD(I, 4) = FLT(I, 3)
                PRD(I, 5) = - FLT(I, 5) - FLT(I, 6) - FLT(I, 7)
                PRD(I, 6) = FLT(I, 5)
                PRD(I, 7) = FLT(I, 6)
                PRD(I, 8) = AR(1)*FLT(I, 8) + AR(2)*FLT(I, 9)
                PRD(I, 9) = FLT(I, 8)
                PRD(I, 1) = PRD(I, 1) + SQRT(SIG2(3))*RGAUSS()
                PRD(I, 3) = PRD(I, 3) + SQRT(SIG2(4))*RGAUSS()
                PRD(I, 5) = PRD(I, 5) + SQRT(SIG2(5))*RGAUSS()
                PRD(I, 8) = PRD(I, 8) + SQRT(SIG2(6))*RGAUSS()
C
                DO 200 J = 1, NP
                    PRD(I, NS + J) = FLT(I, NS + J) + HHP(J)*RGAUSS()
200          CONTINUE
C
1000    CONTINUE
C
        RETURN
        END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE WEIGHT(UNEMP, CP12, PRD, CUM, TEMP2, FTEM, MN, NS, NP, NSIG)
C
C ... COMPUTATION OF THE "LIKELIHOOD" OF EACH PARTICLE ...
C
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
        PARAMETER(NP1 = 10, NSIG1 = 6)
        DIMENSION PRD(MN, NS + NP), CUM(MN), TEMP2(MN, NS + NP), PP(NP1), SIG2(NSIG1), AR(2)
C
        TEMP = 0.0D0
        DO 1000 I = 1, MN
            DO 100 J = 1, NP

```

高部勲：非線形状態空間モデル及びモンテカルロ・フィルタによる可変NAIRUの推定

```

        PP(J) = PRD(I, NS + J)
100  CONTINUE
      CALL TRANSP(PP, NP, NSIG, SIG2, AR, ALPHA, BETA, RDS, RAM)
      PREDC = PRD(I, 1)*(1.0D0 - ALPHA) + PRD(I, 8)*BETA/UNEMP
      PERR1 = CPI2 - PREDC
      STD1 = SQRT(SIG2(1))
      PREDU = PRD(I, 3) + PRD(I, 5) + PRD(I, 8)
      PERR2 = UNEMP - PREDU
      STD2 = SQRT(SIG2(2))
      AA = GAUSS2(PERR1, PERR2, STD1, STD2)
      TEMP = TEMP + AA
      CUM(1) = TEMP
1000 CONTINUE
C
      FTEM = CUM(MN)
      DO 1500 I = 1, MN
        CUM(I) = CUM(I) / CUM(MN)
1500 CONTINUE
C
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE RESMPL(SMPL, CUM, RES, MN, ICOL, IROW)
C
C ... RESAMPLING ...
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
      DIMENSION SMPL(IROW, MN, ICOL), CUM(MN), RES(IROW, MN, ICOL)
C
      DO 30 I = 1, MN
        DMN = DBLE(MN)
        DI = DBLE(I)
        BL = (DI - 1.0D0) / DMN
        BU = DI / DMN
        U = GUNIF(BL, BU)
C
        IF (U .LE. CUM(I)) THEN
          NUM = I
          GO TO 15
        END IF
C
        DO 10 J = 2, MN
          IF (U .GT. CUM(J - 1) .AND. U .LE. CUM(J)) THEN
            NUM = J
            GO TO 15
          END IF
10      CONTINUE
15      CONTINUE
        DO 25 K = 1, IROW
          DO 20 L = 1, ICOL
            RES(K, I, L) = SMPL(K, NUM, L)
20      CONTINUE
25      CONTINUE
30      CONTINUE
C
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE SRFILT(UNEMP, CPI2, LN, NP, NS, ND, NSIG, SIG2, AR, ALPHA, BETA, FF, AIC, XFS, U1S, VFS, GAINS,
$                PERRS, W, XFO, U3T, NN, IKSM)
C
C ... THE KALMAN FILTER ALGORITHM FOR THE ESTIMATION OF NEGATIVE LOG-LIKELIHOOD FUNCTION ...
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
      PARAMETER(NS1 = 9, ND1 = 2, NSIG1 = 6, PI = 3.1415926535, TOL = 1.0D-6)
      DIMENSION UNEMP(LN), CPI2(LN), SIG2(NSIG), AR(2), XFO(NS), XF(NS1), XFS(NS, LN), U3T(NS, NS), U3T2(NS1, NS1)
      DIMENSION U1S(ND, ND, LN), VFS(NS, NS, LN), GAINS(NS, ND, LN), PERR(ND1), E(ND1), PERRS(ND, LN), XP(NS1)
      DIMENSION U(NS1 + NSIG1, ND1 + NS1), U1(ND1, ND1), U11(ND1, ND1), U2(NS1, ND1), GAIN(NS1, ND1)
      NU1 = NS + NSIG
      NU2 = NS + ND
C
      DO 5 I = 1, NS
        XF(I) = XFO(I)
5      CONTINUE
C
C ... SAVE "NN + 1"-TH FILTERING VECTOR AND VARIANCE (SQUARE ROOT MATRIX FORM) ...
C

```

```

IF (IKSM .EQ. 1) THEN
DO 10 I = 1, NS
  XFS(I, NN + 1) = XF(I)
10 CONTINUE
DO 40 I = 1, NS
  DO 30 J = 1, I
    SUM = 0.0
    IJM = MIN(I, J)
    DO 20 IJ = 1, IJM
      SUM = SUM + U3T(IJ, I)*U3T(IJ, J)
20 CONTINUE
    VFS(I, J, NN + 1) = SUM
    IF (I .NE. J) THEN
      VFS(J, I, NN + 1) = SUM
    END IF
30 CONTINUE
40 CONTINUE
END IF
C
FTEMP = 0.000
IFRAG = 0
DO 1000 II = NN + 1, LN
C
  IF (IFRAG .EQ. 1) THEN
    GO TO 950
  END IF
C
C ... DEFINITION OF MATRIX "U" ...
C
CALL STZERO(U, NU1, NU2, 1)
DO 100 I = 1, 8
  U(I, 1) = BETA * U3T(I, 8) / UNEMP(II)
100 CONTINUE
U(1, 1) = U(1, 1) + (1.000 - ALPHA)*U3T(1, 1)
DO 110 I = 1, 8
  U(I, 2) = U3T(I, 8)
110 CONTINUE
DO 120 I = 1, 5
  U(I, 2) = U(I, 2) + U3T(I, 5)
120 CONTINUE
DO 130 I = 1, 3
  U(I, 2) = U(I, 2) + U3T(I, 3)
130 CONTINUE
U(1, 3) = 2.000*U3T(1, 1) - U3T(1, 2)
U(2, 3) = - U3T(2, 2)
U(1, 4) = U3T(1, 1)
DO 140 I = 1, 3
  U(I, 5) = 2.000*U3T(I, 3) - U3T(I, 4)
140 CONTINUE
U(4, 5) = -U3T(4, 4)
DO 150 I = 1, 3
  U(I, 6) = U3T(I, 3)
150 CONTINUE
DO 160 I = 1, 5
  U(I, 7) = - U3T(I, 5) - U3T(I, 6) - U3T(I, 7)
160 CONTINUE
U(6, 7) = - U3T(6, 6) - U3T(6, 7)
U(7, 7) = - U3T(7, 7)
DO 170 I = 1, 5
  U(I, 8) = U3T(I, 5)
170 CONTINUE
DO 180 I = 1, 6
  U(I, 9) = U3T(I, 6)
180 CONTINUE
DO 190 I = 1, 8
  U(I, 10) = AR(1)*U3T(I, 8) + AR(2)*U3T(I, 9)
190 CONTINUE
U(9, 10) = AR(2)*U3T(9, 9)
DO 200 I = 1, 8
  U(I, 11) = U3T(I, 8)
200 CONTINUE
U(10, 1) = SQRT(SIG2(1))
U(11, 2) = SQRT(SIG2(2))
U(12, 3) = SQRT(SIG2(3))
U(13, 5) = SQRT(SIG2(4))
U(14, 7) = SQRT(SIG2(5))
U(15, 10) = SQRT(SIG2(6))

```

```

DO 220 I = 1, NS
  DO 210 J = 1, NS
    U3T2(I, J) = U3T(I, J)
210   CONTINUE
220   CONTINUE
C
C----- HOUSEHOLDER TRANSFORMATION OF MATRIX "U"-----
C----- CALL HUSHLD(U, NU1, NU2)-----
C
U1(1, 1) = U(1, 1)
U1(2, 1) = U(1, 2)
U1(2, 2) = U(2, 2)
U11(1, 1) = 1.0D0 / U1(1, 1)
U11(2, 2) = 1.0D0 / U1(2, 2)
U11(1, 2) = 0.0D0
U11(2, 1) = -U1(2, 1) / ( U1(1, 1)*U1(2, 2) )
C
DO 320 I = 1, ND
  DO 310 J = 1, NS
    U2(J, I) = U(I, J + ND)
310   CONTINUE
320   CONTINUE
DO 340 I = 1, NS
  DO 330 J = 1, NS
    U3T(I, J) = U(I + ND, J + ND)
330   CONTINUE
340   CONTINUE
C
C ... COMPUTATION OF KALMAN GAIN ...
C
DO 370 I = 1, NS
  DO 360 J = 1, ND
    SUM = 0.0
    DO 350 IJ = J, ND
      SUM = SUM + U2(I, IJ)*U11(IJ, J)
350   CONTINUE
      GAIN(I, J) = SUM
360   CONTINUE
370   CONTINUE

UNORM = 0.0D0
DO 710 I = 1, NS
  DO 700 J = 1, NS
    UNORM = UNORM + ABS(U3T2(I, J) - U3T(I, J))*2
700   CONTINUE
710   CONTINUE
UNORM = UNORM / ( NS*(NS + 1)/2 )
UNORM = SQRT(UNORM)
C
IF (UNORM .LT. TOL) THEN
  IFRAG = 1
END IF
C
950   CONTINUE
C
CALL TRANST(XP, XF, AR, NS, 1, 0)
PREDC = XF(1) * (1.0D0 - ALPHA) + XF(8) * BETA / UNEMP(11)
PERR(1) = CP12(11) - PREDC
PREDU = XF(3) + XF(5) + XF(8)
PERR(2) = UNEMP(11) - PREDU
C
C ... FILTERING ...
C
DO 390 I = 1, NS
  SUM = 0.0D0
  DO 380 J = 1, ND
    SUM = SUM + GAIN(I, J)*PERR(J)
380   CONTINUE
    XF(1) = XP(1) + SUM
390   CONTINUE
C
IF (1KSM .EQ. 1) THEN
  PERRS(1, 11) = PERR(1)
  PERRS(2, 11) = PERR(2)
  U11S(1, 1, 11) = U11(1, 1)
  U11S(2, 1, 11) = U11(2, 1)

```

```

U11S(2, 2, 11) = U11(2, 2)
IF (11 .LT. LN) THEN
  DO 400 I = 1, NS
    XFS(I, 11 + 1) = XF(I)
400    CONTINUE
    DO 430 I = 1, NS
      DO 420 J = 1, I
        SUM = 0.0
        IJM = MIN(I, J)
        DO 410 IJ = 1, IJM
          SUM = SUM + U3T(IJ, I)*U3T(IJ, J)
410        CONTINUE
          VFS(I, J, 11 + 1) = SUM
          IF (I .NE. J) THEN
            VFS(J, I, 11 + 1) = SUM
          END IF
420        CONTINUE
430      CONTINUE
    END IF
    DO 450 I = 1, NS
      DO 440 J = 1, ND
        GAINS(I, J, 11) = GAIN(I, J)
440      CONTINUE
450    CONTINUE
  END IF
C
  IF (11 .GT. NN) THEN
    DO 510 I = 1, ND
      TEMP = 0.0D0
      DO 500 J = 1, I
        TEMP = TEMP + U11(I, J)*PERR(J)
500      CONTINUE
      E(I) = TEMP
510    CONTINUE
    TEMP = 0.0D0
    DO 520 I = 1, ND
      TEMP = TEMP + E(I)**2
520    CONTINUE
    FTEMP = FTEMP + TEMP + 2.0D0*LOG( ABS(U1(1, 1)) ) + 2.0D0*LOG( ABS(U1(2, 2)) )
  END IF
C
1000 CONTINUE
C
C ... COMPUTATION OF THE NEGATIVE LOG-LIKELIHOOD ...
C
  DLN = DBLE(LN)
  FF = 2.0D0*DLN*LOG(2.0D0*PI) + FTEMP + W
  FF = FF/2.0D0
C
RETURN
END

```

参考文献

- [1] A. Aguiar and M. Martins (2003) “Trend cycle and nonlinear trade-off in the Euro Area”, FEP Working Paper, 122
- [2] A. Aguiar and M. Martins (2005) “Testing the significance and the nonlinearity of the Phillips trade-off in the Euro Area”, *Empirical Economics*, 30, 665-691
- [3] M. Apel and P. Jansson (1999) “A Theory-Consistent System Approach for Estimating Potential Output and the NAIRU”, *Economics Letters*, 64-3, 271-275
- [4] B. Berg (2004) “Markov Chain Monte Carlo Simulations And Their Statistical Analysis: With Web-based Fortran Code”, World Scientific Pub Co Inc
- [5] A. Basistha and C. Nelson (2007) “New measures of the output gap based on the forward-looking new Keynesian Phillips curve”, *Journal of Monetary Economics*, 54, 498-511
- [6] A. Basistha and R. Startz (2004) “Measuring the NAIRU with Reduced Uncertainty: A Multiple Indicator-Common Component Approach”, University of Washington, Working Papers, 22
- [7] C. Chu and L. Cohen (2007) “Estimation of infrastructure performance models using state-space specifications of time series models”, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 15-1, 17-32
- [8] R. Domenech and V. Gomez (2006) “Estimating Potential Output, Core Inflation, and the NAIRU as Latent Variables”. *Journal of Business & Economic Statistics*, 24, 354-365
- [9] J. Durbin and J. Koopman (2001) “Time series Analysis by State Space Methods”, Oxford University Press  
(邦訳：和合肇、松田安昌 (2004) 「状態空間モデリングによる時系列分析入門」、シーエーピー出版)
- [10] A. Doucet et al. (2001), *Sequential Monte Carlo Methods in Practice (Statistics for Engineering and Information Science)*, Springer-Verlag
- [11] R. Gordon (1997) “The Time-Varying NAIRU and its Implications for Economic Policy”, NBER Working Paper, 11-1, 11-32
- [12] G. Guillaume and M. Nicolas (2004) “The US Phillips Curve and inflation expectations: A State Space Markov-Switching explanatory model”, *Computing in Economics and Finance*, 133
- [13] A. Harvey (1981) “Time series Models”, Philip Allan Publishers (邦訳：国友直人、山本拓 (1985) 「時系列モデル入門」、東京大学出版会)
- [14] C. Kim and C. Nelson (1999) “State Space Models with Regime Switching”, The MIT Press
- [15] G. Kitagawa (1996) “Monte Carlo filter and smoother for nonlinear state space models”, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5, 1-25
- [16] G. Kitagawa (1998) “A self-organizing state space model”, *Journal of the American Statistical Association*, 93, 1203-1215
- [17] S. Koopman et al. (1995), *Stamp 5.0 (Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor)*. International Thompson Publishing, London
- [18] S. Koopman and J. Durbin (1998) “Fast filtering and smoothing for multivariate state space models”, Tilburg University, Discussion Paper, 18
- [19] S. Koopman et al. (1999) “Statistical algorithms for models in state space using SsfPack 2.2”, *Econometrics Journal*, 2, 113-166
- [20] N. Kuttner (1994) “Estimating Potential Output as a latent Variable”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12-3, 361-368
- [21] T. Laubach (2001) “Measuring the NAIRU: Evidence from Seven Economies”, *The Review of Economics and Statistics*, 83-2, 218-231
- [22] M. Lanzafame (2006) “The Nature of Regional Unemployment in Italy,” Department of Economics, Studies in Economics 0607



- [23] C. Logeay and S. Tober (2003) “Time Varying NAIRU and real interest rates in the Euro Area”, German Institute for Economic Research Discussion Papers, 351
- [24] M. Luciano (2004) “The macroeconomics of Italy: a regional perspective, Journal of Policy Modeling”, 26, 927-944
- [25] N. Mankiw (2002) , Macroeconomics, 5th Edition, Worth Publisher, New York
- [26] M. Matsumoto and T. Nishimura (1998) “Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator”, ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation 8-1, 3-30
- [27] J. Peng and J. Aston (2006) “A MATLAB Software Implementation for Time Series Analysis by State Space Methods”, Proceedings of the American Statistical Association Business and Economics Section
- [28] W. Press et al. (1992) “Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing”, Cambridge University Press
- [29] T. Proietti et al. (2007) “Estimating potential output gap for the euro area: a model-based production function approach”, Empirical Economics, 33, 85-113
- [30] P. Richardson et al. (2000) “The Concept, Policy Use and Measurement of Structural Unemployment”, OECD Economic Department Working Papers, 250
- [31] P. Richardson et al. (2001) “Estimating the structural rate of unemployment for the OECD countries”, OECD Economic Studies, 33
- [32] J. Stock and M. Watson (1998) “Median Unbiased Estimation of Coefficient Variance in a Time Varying Parameter Model”, NBER Technical Working Papers, 0201
- [33] V. Vineet (2000) “Estimating Output Gap for the Indian Economy: Comparing Results from Unobserved-Components Models and the Hodrick-Prescott Filter”, Indian Institute of Management Ahmedabad Working Papers, 04-02
- [34] S. Yoshioka (2002) “Estimation of Output Gap in Southeast Asian Countries - A State Space Model Approach -”, TSQ Discussion paper
- [35] 浅子和美 (1993) 「マクロ経済学」、新世社
- [36] 市村直幸 (2002) 「自己組織化型状態空間モデルを用いた運動軌跡のフィルタリング」、情報処理学会論文誌、第 43 巻、92-104
- [37] 伊庭幸人 他 (2005) 「計算統計Ⅱ (統計科学のフロンティア 12)」、岩波書店
- [38] 片山徹 (2000) 「応用カルマンフィルタ (新版)」、朝倉書店
- [39] 川崎能典 (2001) 「多変量時系列に対する主成分因子分析」、統計数理、49-1、109-131
- [40] 北浦修敏 他 (2003) 「構造的失業とデフレーション - フィリップス・カーブ、UV 分析、オークン法則 -」、財務省財務総合政策研究所、フィナンシャル・レビュー、02A-26-2
- [41] 北川源四郎 (1993) 「時系列解析プログラミング」、岩波書店
- [42] 北川源四郎 (1996) 「モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について」、統計数理、44-1、31-48
- [43] 北川源四郎 (1997) 「季節調整プログラム DECOMP とその後の展開」、統計数理、45-2、217-232
- [44] 北川源四郎、川崎能典 (2001) 「時系列モデルによるインフレ率予測誤差の分析」、日本銀行調査統計局、ワーキングペーパー、01-03
- [45] 北川源四郎 (2005) 「時系列解析入門」、岩波書店
- [46] 木村武 他 (2008) 「日本のフィリップス曲線に何が起こったか - 企業の価格設定行動の変化と名目硬直性の高まり -」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、No. 08-J-1
- [47] 玄田有史、近藤絢子 (2003) 「構造的失業とは何か」、ESRI Discussion Paper、53
- [48] 厚生労働省 (2002) 「平成 14 年版 労働経済の分析」
- [49] 佐藤整尚 (1997) 「Web Decomp の紹介 - WWW 上で行う季節調整システム -」、統計数理、45-2、245-263

- [50] 高橋朋彦、佐藤整尚 (2002) 「モンテカルロ・フィルタを用いた金利モデルの推定」、統計数理、50-2、133-147
- [51] 高部勲 (2004) 「小地域推定各手法の労働力調査への適用」、総務省統計研修所、統計研究彙報、61、1-138
- [52] 高部勲 (2005) 「状態空間モデルを用いた季節調整法の労働力調査への適用」、総務省統計研修所、統計研究彙報、62、71-92
- [53] 武隈慎一 (1998) 「マクロ経済学の基礎理論」、新世社
- [54] 田渡雅敏 (2005) 「失業率分解モデルの研究」、広島大学マネジメント研究、5、161-169
- [55] 敦賀貴之、武藤一郎 (2007) 「ニューケインジアン・フィリップス曲線に関する実証研究の動向について」、日本銀行金融研究所、ディスカッションペーパー、J-23
- [56] 独立行政法人 労働政策研究・研修機構 (2004) 「構造的・摩擦的失業に関する研究 (中間報告)」、労働政策研究報告書、No. L-8
- [57] 独立行政法人 労働政策研究・研修機構 (2007) 「地域雇用創出の新潮流」、第 I 期中期計画 プロジェクト研究シリーズ、1
- [58] 原田泰、岩田規久男 他 (2002) 「デフレ不況の実証分析—日本経済の停滞と再生—」、東洋経済新報社
- [59] 新見一正 (2003) 「マイルド・デフレ下における『インフレ目標』論—短期フィリップス曲線の非線形性をめぐって—」、Japan Research Review、8月号
- [60] 樋口知之 (1996) 「遺伝的アルゴリズムとモンテカルロ・フィルタ」、統計数理、44-1、19-30
- [61] 樋口美雄 (2001) 「雇用と失業の経済学」、東洋経済新報社
- [62] 廣瀬康生、鎌田康一郎 (2002) 「可変 NAIRU によるわが国の潜在成長率」、日本銀行金融研究所、ディスカッションペーパー、02-8
- [63] 廣松毅、浪花貞夫 (1990) 「経済時系列分析」、朝倉書店
- [64] 藤井宏一 (2004) 「最近のわが国の NAIRU の動向について」、労働統計調査月報、56-8、12-22
- [65] 堀雅博、寺井晃 (2004) 「カールソン・パーキン法によるインフレ期待の計測と諸問題」、ESRI Discussion Paper Series、91
- [66] 森正武 (1987) 「FORTRAN77 数値計算プログラミング」、岩波書店
- [67] 矢野浩一、佐藤整尚 (2007) 「初期分布探索付き自己組織化状態空間モデルによる金融時系列解析の最前線：t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」、FSA リサーチレビュー
- [68] 山澤成康 (2002) 「状態空間モデルを使った GDP ギャップの推計」、跡見学園女子大学マネジメント学部ディスカッションペーパー、02-1
- [69] 湯前祥二、鈴木輝好 (2000) 「モンテカルロ法の金融工学への応用」、浅倉書店
- [70] 美添泰人 他 (2003) 「景気指標の新しい動向」、ESRI 経済分析、166
- [71] “Salford FTN77” ホームページ <http://www.salfordsoftware.co.uk/>
- [72] “Mersenne Twister in FORTRAN”, Mersenne Twister ホームページ <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/VERSIONS/FORTRAN/fortran.html>
- [73] “TIMSAC for R package” ホームページ <http://jasp.ism.ac.jp/ism/timsac/>
- [74] “Web-DECOMP” ホームページ <http://ssnt.ism.ac.jp/inets2/JapaneseVersion/title.html>
- [75] “時系列解析プログラミング” ホームページ <http://tswww.ism.ac.jp/kitagawa/HTML-new/IWANAMI/岩波時系列解析プログラム.html>