

状態空間モデルを用いた季節調整法の労働力調査への適用

高部 勲[†]

The Application of Seasonal Adjustment Methods Using State Space Model to the Labour Force Survey

Isao Takabe

本論文では、単純な状態空間モデルによる季節調整法を労働力調査のいくつかの長期時系列に適用し、その結果についてまとめている。その際に様々な季節変動のモデルを考え、それらによる季節調整結果の比較分析を行っている。分析の結果、各季節周波数の成分を独立に駆動させる“パラレル型”のモデルが、いずれの時系列においても最も AIC が低く、当てはまりがよかった。

キーワード 状態空間モデル, タンデム型, パラレル型, 加重平均型

In this paper, I considered seasonal adjustment method using some simple state space models which were based on the various seasonal component models, and applied these methods to the time series of Japanese labour force survey. The results of seasonal adjusted series are compared. The result based on the "parallel" type seasonal component model, in which each seasonal frequency component were driven independently, was superior to the results based on the other models in terms of AIC.

Key words : State space model , Tandem type, Parallel type, Weighted average type

はじめに

季節調整法については、移動平均を基本とする方法やモデルを明確に仮定する方法など、様々な手法がある。その中のひとつに、状態空間モデルによる方法がある。状態空間モデルによる季節調整法には、以下のような利点がある。

- ・移動平均を用いる X11 と異なり、系列の端点で欠項が生ずるという問題がなく、現在までのデータを十分に活用した推定を行うことができる。
- ・カルマンフィルタにより、推定値の計算を効率的に行うことができる。
- ・平均二乗誤差を最小にするという意味で、数理的に最適な推定を行うことができる。
- ・状態空間モデルでは柔軟な表現が可能であり、様々なモデルを考えることができる。
- ・AIC により、当てはまりのよいモデルを客観的に選ぶことができる。

本論文では原系列をトレンド、季節変動、不規則変動の 3 つの成分に分解する単純な状態空間モデルを考え、それに基づく季節調整法を労働力調査の就業 3 状態の長期時系列に適用した結果

についてまとめている。その際に季節変動のモデルとしてタンデム型、加重平均型、パラレル型の3種類のモデルを考えて、それぞれのモデルによる季節調整結果について比較を行っている。これは尾崎（1997）を参考にしている。労働力調査の時系列にはどのタイプのモデルによる季節調整法が最も適しているかを調べるのが、本論分の主な目的である。

以下、本論分の構成について述べる。I章では、状態空間モデルを用いた季節調整法及びDECOMPで採用されているようなタンデム型の季節変動のモデルについて簡単に解説する。II章では、I章で解説したタンデム型モデル以外の、様々な季節変動のモデルについて解説する。III章では、I章及びII章で解説したモデルを用いた季節調整法を労働力調査の就業3状態の長期時系列に適用し、それらの結果について比較及び考察を行う。

I 状態空間表現による標準的な季節調整モデル

この章では、状態空間モデルを用いた季節調整法の概要について、北川（1986a）、北川（1997）を参考にしつつ簡単に解説を行う。以下の説明の中に出てくる記号は、北川（1986a）のものを参考にしている。

1 標準的な季節調整モデル

観測値の時系列 $y(n)$ が以下のような3つの項に分解されるような、単純な季節調整のモデルを考える。

$$(1) \quad y(n) = t(n) + s(n) + w(n)$$

トレンド項 $t(n)$: 長期的な趨勢を表す成分であり、緩やかに変動すると仮定される。 季節変動項 $s(n)$: 一年を周期として変動する成分である。 偶然変動項 $w(n)$: 上記のどれにも分類されない、標本誤差や景気の一時的な変動などの変動を表す成分である。

各時点で $t(n)$ 、 $s(n)$ 、 $w(n)$ の3種類のパラメータが存在する。よって式（1）を仮定しただけでは、推定すべきパラメータ数の合計が観測値データの3倍とかなり多くなってしまう。そこで式（1）の各項に対して適当なモデルを仮定し、少数のパラメータによってこれらの項を制御する。以下の各節で、それぞれの項に仮定するモデルの説明を行う。

① トrend項のモデル

トレンドは局所的に $m_1 - 1$ 次の多項式で近似できると仮定する。これは $(1-B)^{m_1} t(n) = 0$ という近似式を仮定するのと同じことである。ここで記号 B はバックシフトオペレータ ($B(x(n)) = x(n-1)$) を表している。このとき、トレンド項 $t(n)$ に以下のようなモデルを仮

定する。

$$(2) \quad (1-B)^{m_1}t(n)=v_1(n), \quad v_1(n) \sim N(0, \tau_1^2)$$

近似式 $(1-B)^{m_1}t(n) \approx 0$ の右辺を平均0の正規確率変数で置き換えているところがポイントである。これにより局所的な多項式の関係が時間とともに少しずつ変化していくような場合を扱うことができる。この変化の大きさを決定するパラメータが τ_1^2 である。 τ_1^2 の値は通常未知なので、推定する必要がある。

差分の階数 m_1 は通常、低次(1または2)に設定することで十分な場合が多い。本論文では簡単のために、 $m_1=1$ の場合のみを考えることにする。

② 季節変動項のモデル

季節変動項については、一見、次のようなモデルが自然であると思われる。

$$(3) \quad (1-B^{12})s(n)=v_2(n), \quad v_2(n) \sim N(0, \tau_2^2)$$

しかし式(3)のモデルは上手く機能しない。それは、式(3)のモデルを用いた場合、季節変動項とトレンド項に関して同じ尤度を持つ無数の分解が存在し、分解の一意性が成立しなくなるからである。この問題の原因は、式(3)の左辺のオペレータ部分を $(1-B^{12})=(1-B)(1+B+\dots+B^{11})$ と因数分解したときに、トレンド項のモデルとの間に $1-B$ という共通因子が含まれていることにある。詳しくは北川(1997)を参照のこと。

そこで $(1+B+\dots+B^{11})s(n) \approx 0 \Rightarrow (1-B^{12})s(n) \approx 0$ の関係が成立することに注目し、季節変動項に以下のモデルを仮定する。

$$(4) \quad (1+B+\dots+B^{11})s(n)=v_2(n), \quad v_2(n) \sim N(0, \tau_2^2)$$

トレンド項の場合と同じく、近似式の右辺を平均0の正規確率変数で置き換えている。この項の未知パラメータは τ_2^2 である。式(4)のモデルを用いれば、トレンドとの間に $1-B$ という共通因子は含まれないので、分解の一意性が成立する。

上記のモデルは“タンデム型”のモデルと呼ばれており、統計数理研究所で開発された季節調整プログラム DECOMP で採用されている。タンデム型という名称の由来については、II章2節を参照のこと。

③ 偶然変動項のモデル

偶然変動項 $w(n)$ は、以下のような平均0、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。

$$(5) \quad w(n) \sim N(0, \sigma^2)$$

この項の未知パラメータは σ^2 である。

偶然変動項には、トレンドと季節性で説明できない短期的なショックや標本誤差などの様々な変動が入ってくる可能性がある。季節性をのぞいた足元の動向を見るためには、重要な要素であると言える。

2 状態空間モデル

状態空間モデルは、次のような2本の方程式からなる動的なシステムである。

$$(6) \quad y(n) = H\alpha(n) + w(n), \quad w(n) \sim N(0, \sigma^2) \quad : \text{観測方程式}$$

$$(7) \quad \alpha(n) = F\alpha(n-1) + Gv(n), \quad v(n) \sim N(0, Q) \quad : \text{遷移方程式}$$

$$\left[\begin{array}{l} y(n) : \text{観測値} \\ w(n) : \text{観測ノイズ (確率変数)} \\ \alpha(n) : \text{状態変数ベクトル} \\ v(n) : \text{システムノイズ (確率変数)} \\ H : \text{観測行列} \quad F : \text{遷移行列} \end{array} \right]$$

観測値 $y(n)$ 及び観測ノイズは1次元であるとする。また行列 F 、 G 、 H は既知であると仮定する。分散共分散行列 Q 及び観測ノイズの分散 σ^2 は、今のところ既知であると仮定しておいて、後で推定する。未知パラメータの推定方法については、III章を参照のこと。

状態変数 $\alpha(n)$ は観測することができず、(6) 式の観測方程式を通して観測ノイズ $w(n)$ が付加され、観測値 $y(n)$ として観測される。状態変数 $\alpha(n)$ は、遷移方程式 ((7)式) 及びシステムノイズ $v(n)$ に従って、確率的に変動する。

状態空間モデルの最大の特徴は、オンライン・リアルタイムの処理が可能なことである。つまり新しい観測値が観測されるたびに、その時点での最適な推定値を効率よく求めることができる。システムを記述する状態変数と、実際に観測される観測値を明確に分離し、状態変数の動的特性を線形な遷移方程式の形で特徴付けたことが、オンライン・リアルタイムの処理を可能にしていると言える。これらの特性により、状態空間モデルは現実への応用が容易となっている。(杉原(1994))。

I 章で解説した標準的な季節調整モデルを状態空間モデルの形で表現するには、観測方程式及び遷移方程式の行列を以下のような形にとればよい。

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(n) = \begin{bmatrix} T(n) \\ S(n) \\ S(n-1) \\ \vdots \\ S(n-11) \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ H = [1 \mid 1 \mid 0 \cdots 0] \quad v = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \tau_1^2 & 0 \\ 0 & \tau_2^2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

この場合の状態変数ベクトル $\alpha(n)$ の次元は 12 である。また不規則変動項 $w(n)$ は観測方程式の中の観測ノイズとして扱われている。

状態空間モデルの形で表現されたシステムに対しては、カルマンフィルタと呼ばれるアルゴリズムを適用することができて、時系列の各項 $t(n)$ 、 $s(n)$ 、 $w(n)$ への分解を効率よく行うことができる。これについてはIV章で説明する。

II 様々な季節変動のモデル

季節変動項については、I 章の式 (4) 以外にも様々なモデルが考えられる。この章では尾崎 (1997) を参考にして、“加重平均型” 及び“パラレル型” の季節変動項のモデルを導入し、それらについて簡単に解説する。

1 “加重平均型” モデルの導入

ベイズ型情報量基準を用いた季節調整法である BAYSEA では、季節変動の滑らかさに関して $(1+B+\dots+B^{11})s(n) \sim 0$ と $(1-B^{12})s(n) \sim 0$ の二つの仮定を置き、これらを季節変動のモデルに組み込んでいる (石黒 (1986))。式 (4) の季節変動のモデルは、このうちの $(1-B^{12})s(n) \sim 0$ の仮定を落としたものとなっている。このことが原因で、式 (4) による季節変動のモデルを用いた場合の季節変動が“固い”動きをする (季節変動項の形状がほとんど変化しない) 場合が多くなるということが指摘されている (尾崎 (1997))。時系列によっては固い季節変動のしわ寄せがトレンドや不規則変動に及んで季節調整値の変動が大きくなり、季節調整結果が不安定になる可能性もある。

上記の問題に対処する方法としては、 $(1+B+\dots+B^{11})s(n) \sim 0$ と $(1-B^{12})s(n) \sim 0$ の二つの仮定を季節変動項のモデルに組み込むことが考えられる。これについては、ウエイト ϕ という新たなパラメータを導入して二つの制約を加重平均した以下のモデルを用いればよい。

$$(9) \quad (1-\phi)(1+B+\dots+B^{11})s(n) + \phi(1-B^{12})s(n) = v_2(n), \quad v_2(n) \sim N(0, \tau_2^2)$$

上記のモデルを、“加重平均型” モデルと呼ぶことにする。この場合の季節変動項に関する未知パラメータは τ_2^2 と ϕ である。

式 (9) は以下のように変形することができる。

$$(10) \quad (1+B+\dots+B^{11})s(n) = \tilde{v}_2(n), \quad (1-\phi B)\tilde{v}_2(n) = v_2(n)$$

式 (10) によると加重平均型のモデルは、式 (4) においてホワイトノイズ $v_2(n)$ の代わりに、AR(1)モデルに従う特殊なノイズ $\tilde{v}_2(n)$ を用いたモデルであると解釈できる。ホワイトノイズ $v_2(n)$ のスペクトルがすべての周波数の成分をほぼ同量ずつ含んでいるのに対して、AR(1)モデル

に従うノイズ $\tilde{v}_2(n)$ のスペクトルは周波数に反比例して高い周波数ほど弱くなるという特徴がある。よって周波数が低く波長が長い光が赤い色をしていることのたえから、 $\tilde{v}_2(n)$ はピンクノイズと呼ばれる。

式 (9) を状態空間モデルの形で表現するためには、まず式 (9) を以下のように変形する。

$$(11) \quad s(n) = ((\phi-1)B + \cdots + (\phi-1)B^{11} + \phi B^{12})v_2(n)$$

そして式 (11) を基にして、式 (8) の $\alpha(n)$ 及び $\mathbf{F}$ を次のように変更すればよい。

$$(12) \quad \alpha(n) = \begin{bmatrix} T(n) \\ S(n) \\ S(n-1) \\ \vdots \\ S(n-12) \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi-1 & \cdots & \phi-1 & \phi \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この場合の状態変数ベクトル $\alpha(n)$ の次元は 13 である。

ϕ は加重平均のウェイトなので、 $0 \leq \phi \leq 1$ でなければならない。また ϕ が 1 に近い値に推定されてしまうと、式 (9) が式 (3) のモデルに近くなり、I 章 1 節で述べたように分解の一意性

に関して問題がおこる。そこで今回の分析では、 $0.9 \times \frac{\exp(u)}{\exp(u)+1} = \phi$ と変形して u を推定している。

加重平均型モデルを用いた場合には推定すべきパラメータがひとつ増えるので、尤度関数の形状が複雑になり、タンデム型のモデルと比較して計算にかかる時間がある程度増加するものと予想される。

1 “パラレル型”モデルの導入

式 (4) の左辺にあるオペレータ部分 $(1+B+\cdots+B^{11})$ を因数分解すると、以下のようになる。

$$(13) \quad \begin{aligned} 1+B+\cdots+B^{11} \\ &= \prod_{i=1}^6 (1-2\cos(\omega_i)B+B^2) \\ &= (1-\sqrt{3}B+B^2)(1-B+B^2)(1+B^2)(1+B+B^2)(1+\sqrt{3}B+B^2)(1+2B+B^2) \end{aligned}$$

$$\left[\omega_i = \frac{2\pi i}{12} : \text{季節周波数 } (i=1,2,3,4,5,6) \right]$$

右辺の各因子はそれぞれ、12 か月、6 か月、4 か月、3 か月、2.4 か月、2 か月周期の振動成分に対応している。式 (13) を用いて式 (4) の季節変動のモデルを書き直すと、次のようになる。

$$(14) \quad (1 - \sqrt{3}B + B^2)(1 - B + B^2)(1 + B^2)(1 + B + B^2)(1 + \sqrt{3}B + B^2)(1 + B)s(n) = v_2(n)$$

$$v_2(n) \sim N(0, \tau_2^2)$$

ただし左辺の最後の因数は重根になるので、この場合のみ $1+B$ に置き換えている。
 $(1+B \neq 0 \Leftrightarrow (1+2B+B^2) \neq 0)$ 。

式 (14) の表現によれば、式 (4) のモデルでは周期 12 か月とその調和周期成分を表す 6 つのシステムを直列（タンデム）な形、つまり積の形に並べたシステムに、入力としてガウス白色ノイズを入れたときの出力を季節変動とみなしていることになる（尾崎（1997））。I 章の式 (4) による季節変動のモデルが“タンデム”型のモデルと呼ばれる理由はここにある。

12 か月周期の季節変動を表す場合、各周期変動を生成する 6 つの振動系を式 (13) のように直列に並べるのではなく、以下のように並列（パラレル）に並べて、その各システム $s_j(n)$ ($j=1,2,3,4,5,6$) の出力の和を季節変動と考える方法もある（尾崎（1997））。

$$(15) \quad s(n) = \sum_{j=1}^6 s_j(n)$$

$$\left[\begin{array}{l} (1 - \sqrt{3}B + B^2)s_1(n) = v_{2,1}(n) \quad v_{2,1}(n) \sim N(0, \tau_{2,1}^2) \\ (1 - B + B^2)s_2(n) = v_{2,2}(n) \quad v_{2,2}(n) \sim N(0, \tau_{2,2}^2) \\ (1 + B^2)s_3(n) = v_{2,3}(n) \quad v_{2,3}(n) \sim N(0, \tau_{2,3}^2) \\ (1 + B + B^2)s_4(n) = v_{2,4}(n) \quad v_{2,4}(n) \sim N(0, \tau_{2,4}^2) \\ (1 + \sqrt{3}B + B^2)s_5(n) = v_{2,5}(n) \quad v_{2,5}(n) \sim N(0, \tau_{2,5}^2) \\ (1 + B)s_6(n) = v_{2,6}(n) \quad v_{2,6}(n) \sim N(0, \tau_{2,6}^2) \end{array} \right]$$

ここでは各システム $s_j(n)$ がそれぞれ、独立なノイズ $v_{2,1}(n), v_{2,2}(n), \dots, v_{2,6}(n)$ により駆動される

ものと仮定している。この場合の季節変動項に関する未知パラメータは $\tau_{2,1}^2, \tau_{2,2}^2, \dots, \tau_{2,6}^2$ である。

この場合は 6 つの周期成分がそれぞれ別の入力ノイズを持つことになり、より細かな季節変動の推定が行えるものと期待される。このモデルを“パラレル型”モデルと呼ぶことにする。季節変動項にパラレル型モデルを用いた場合には、推定するパラメータ数が大幅に増加する。よって計算にかかる時間もかなり増加するものと予想される。

式 (15) を状態空間モデルの形で表現するためには、式 (8) の $\alpha(n)$ 、 F 、 G 、 H 、 V 、 Q を次のように変更すればよい。

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}(n) = \begin{bmatrix} T(n) \\ S_1(n) \\ S_1(n-1) \\ \vdots \\ S_5(n) \\ S_5(n-1) \\ S_6(n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos(\omega_1) & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2\cos(\omega_5) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_6(n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tau_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \tau_{2,1}^2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & 0 & & \tau_{2,6}^2 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{H} = [1|1010\cdots101] \end{array} \right.$$

III カルマンフィルタ

1 カルマンフィルタによる状態変数の推定

季節調整を行うためには、モデルの選択、パラメータの推定、及び時系列の分解のための計算を行う必要がある。状態空間モデルで表されたシステムに対しては、カルマンフィルタの適用により、これらの計算を効率的に行うことができる。カルマンフィルタとは、観測方程式と遷移方程式とを結び付けて、各時点において平均二乗誤差を最小にする状態変数の推定値を、効率よく推定する一連の方程式のことである（北川（1997））。

利用できる観測値データの長さによって、時系列の分解の問題は以下のように分類することができる。

- ・ 一期先予測：n-1 期までの観測値が手に入った場合の、n 期の状態変数の推定
- ・ フィルタ：n 期までの観測値が手に入った場合の、n 期における状態変数の推定
- ・ 平滑化：n 期より先の N 期までの観測値が手に入った場合の、n 期における状態変数の推定

遷移方程式と観測方程式はともに線形であり、各成分は正規分布に従うことから、状態変数と観測値もまた正規分布に従う。よって状態変数は、平均と分散により完全に決定されることになる。カルマンフィルタを適用すると、状態変数の平均と分散の予測値及びフィルタの値を、逐次的に効率よく推定することができる。

各成分の確率分布の分散を既知とした場合、カルマンフィルタによる状態変数の平均と分散の一期先予測、フィルタ、平滑化の推定値は次のようになる。式中の記号 T は行列の転置を表す。

$$(17) \quad \text{一期先予測} \quad \begin{cases} \alpha(n|n-1) = \mathbf{F}\alpha(n-1|n-1) \\ \mathbf{P}(n|n-1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(n-1|n-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \\ y(n|n-1) = \mathbf{H}\alpha(n|n-1) \\ \tilde{y}(n) = y(n|n) - y(n|n-1) \quad \dots \text{(一期先予測誤差)} \end{cases}$$

$$(18) \quad \text{フィルタ} \quad \begin{cases} f(n|n-1) = \mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}(n)^T + \sigma^2 \quad \dots \text{(一期先予測誤差の分散)} \\ \mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}(n)^T / f(n|n-1) \quad \dots \text{(カルマンゲイン)} \\ \alpha(n|n) = \alpha(n|n-1) + \mathbf{K}(n)\tilde{y}(n) \\ \mathbf{P}(n|n) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}(n)^T)\mathbf{P}(n|n-1) \end{cases}$$

$$(19) \quad \text{平滑化} \quad \begin{cases} \mathbf{A}(n) = \mathbf{P}(n|n)\mathbf{F}^T\mathbf{P}(n+1|n) \\ \alpha(n|N) = \alpha(n|n) + \mathbf{A}(n)(\alpha(n+1|N) - \alpha(n+1|n)) \\ \mathbf{P}(n|N) = \mathbf{P}(n|n) + \mathbf{A}(n)(\mathbf{P}(n+1|N) - \mathbf{P}(n+1|n))\mathbf{A}(n)^T \end{cases}$$

t 期までの観測値が得られた場合の s 期における状態変数の平均及び分散共分散行列の推定値を $\alpha(s|t)$ 及び $\mathbf{P}(s|t)$ で表している。式の導出等の詳細については、北川（1993）及び Harvey（1989）を参照のこと。

推定した結果から季節変動を取り出して原系列から引くことで、季節調整済み系列 $y^{adjust}(n)$ が得られる。例えば式（8）のモデルでは、次のようにすればよい。

$$(20) \quad y^{adjust}(n) = y(n) - \mathbf{H}^{adjust}\alpha(n|N) \\ \left[\mathbf{H}^{adjust} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right]$$

2 最尤法による未知パラメータの推定

モデルの未知パラメータは $\Theta = (\tau_1^2, \tau_2^2, \sigma^2)$ である。 Θ は、観測されたデータを基にして、最尤法により推定する。一期先予測誤差 $\tilde{y}(n)$ が平均 0、分散 $f(n|n-1)$ の正規分布に従うことから、対数尤度 $L(\Theta)$ は以下ようになる。

$$(21) \quad L(\Theta) = \log \left[\prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi f(t|t-1)}} \exp \left(-\frac{\tilde{y}(t)^2}{f(t|t-1)} \right) \right] \\ = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \sum_{t=1}^T \log(f(t|t-1)) - \frac{T}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{y}(t)^2}{f(t|t-1)}$$

カルマンフィルタの公式（式（17）～（19））を用いれば、 $\tilde{y}(n)$ と $f(n|n-1)$ を効率よく計算することができるので、様々な Θ に対する尤度関数を非常に効率よく計算することができる。

今回のように観測ノイズ $w(n)$ の分散 σ^2 が推定期間中に一定であると仮定した場合には、行列 $\mathbf{P}(n|n)$ 、 $\mathbf{P}(n|n-1)$ 、 $\mathbf{Q}$ の全体を σ^2 で割り、以下のような新たな行列 $\tilde{\mathbf{P}}(n|n-1)$ 、 $\tilde{\mathbf{P}}(n|n)$ 、 $\tilde{\mathbf{Q}}$ を定義することで、推定するパラメータの数をひとつ減らすことができる（北川（1997））。

$$(22) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{P}}(n|n-1) = \sigma^2 \mathbf{P}(n|n-1) \\ \tilde{\mathbf{P}}(n|n) = \sigma^2 \mathbf{P}(n|n) \\ \tilde{\mathbf{Q}} = \sigma^2 \mathbf{Q} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \tau_1^2 / \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau_2^2 / \sigma^2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

このとき観測ノイズの分散 σ^2 の推定値及び対数尤度は、以下のようになる（北川（1997））。

$$(23) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{y}(t)^2}{\tilde{f}(t|t-1)}$$

$$(24) \quad L(\Theta) = -\frac{T}{2} \log 2\pi \hat{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(\tilde{f}(t|t-1)) - \frac{T}{2} \\ = -\frac{T}{2} \log 2\pi \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{y}(t)^2}{\tilde{f}(t|t-1)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(\tilde{f}(t|t-1)) - \frac{T}{2}$$

$$\left[\tilde{f}(n|n-1) = f(n|n-1) / \sigma^2 = \mathbf{H}(n) \tilde{\mathbf{P}}(n|n-1) \mathbf{H}(n)^T + 1 \right]$$

よって $\sigma^2 = 1$ と置き、 $\tau_1^2 / \sigma^2 = a_1$ 、 $\tau_2^2 / \sigma^2 = a_2$ を新たなパラメータとして、式（23）の計算及び式（24）の最適化を行えばよい。

式（23）は複雑な非線形の式であり、その最大値を与えるようなパラメータを解析的に求めることは困難である。そこで数値計算による非線形最適化の方法により、未知パラメータの推定を行う。今回の分析では、フリーの統計解析ソフト R を用いてプログラミングを行っており、非線形最適化の数値計算については R のパッケージ `optim` を用いている。このとき、まず Nelder-Mead 法で大まかにパラメータを推定する。そしてその結果を初期値として、BFGS 公式による準ニュートン法により最終的な値を推定している。計算に用いたプログラムについては、本論文の最後に付録としてまとめている。

状態空間モデル及びカルマンフィルタを用いた分解を行うためには、状態変数の平均及び分散の初期値 $\alpha(0|0)$ 、 $\mathbf{P}(0|0)$ を与える必要がある。初期状態の分布は、以下のように設定する。事前の情報が乏しい状態を表現するために、初期状態の分散を大きく設定している。なお今回の分析では、初期値の影響を取り除くために、対数尤度は 4 年目（37 期）以降のデータに対して計算している。

$$(25) \quad \begin{cases} \mathbf{P}(0|0) = 100000 * \mathbf{V}_y \mathbf{I} \\ \alpha(0|0) = [\tilde{T} \mid 0 \quad \dots \quad 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{V}_y : \text{最初の 1 年分観測値による標本分散} \\ \tilde{T} : \text{最初の 1 年分の観測値による標本平均} \\ \mathbf{I} : \text{状態変数と同じ次元の単位行列} \end{cases}$$

IV 結果の考察

I 章及びII章で解説した様々なモデルを用いて、労働力調査の各種時系列の季節調整を行い、その結果を比較する。比較には主に AIC（赤池情報量基準）を用いる。

1 推定方法

今回の分析では、以下のような設定の下で推定を行っている。

- ・ 1975 年 1 月から 2004 年 12 月までの 30 年分の労働力調査全国結果を用いる。
- ・ 外れ値、曜日等の調整は適用しない。
- ・ 対数変換は適用しない。

以上の設定の下で、就業 3 状態に対して、タンデム型モデル（式（4））、加重平均型モデル（式（9））、パラレル型モデル（式（15））のそれぞれのモデルによる季節調整を行う。上記の各モデルで推定した結果について、以下のような観点から評価を行う。

- ・ 季節調整値及び季節変動項のグラフによる比較
- ・ AIC による当てはまりの比較

2 各モデルによる結果の比較

各手法により求められた季節調整値を比較したグラフが図 1～図 8 である。結果の細かい変動を詳しく見るために、直近の 10 年間(1995 年 1 月～2004 年 12 月)の結果について図示している。

どの時系列でも、またどのモデルを用いた場合でも、季節調整値の上昇・下降のパターンは大体同じ傾向を示しているように見える。よってどの手法を用いても、時系列の傾向についての判断を誤るケースは少ないと考えられる。ただし推定された結果を細かく見ると、モデル間にある程度の違いがあることが分かる。特に就業者数では、原系列の季節性が乱れているグラフの後半（2000 年以降）において、各モデルによる結果の違いが大きくなってきている。

タンデム型のモデルを用いた場合には、就業者及び非労働力人口において、季節変動項がかなり安定した動きをしている。完全失業者数及び完全失業率についても、タンデム型モデルの季節変動が時間とともに少しずつ変動の幅を広げているように見えるものの、他の 2 つのモデルと比較すると安定した動きをしていると言える。つまりタンデム型モデルを用いた場合には、他のモデルと比較して季節変動項が固い動きをしていると言える。その結果として原系列の細かな変動の多くが季節変動項以外の項に吸収されており、タンデム型モデルによる季節調整結果の変動は、いずれの時系列においても大きなものとなっている。これはII章 1 節の説明と対応しており、尾崎（1997）でも指摘されているとおりである。

これに対して加重平均型モデルとパラレル型モデルによる季節変動項の変動は、タンデム型モデルに見られたような固さが若干薄れているように見える。就業者数と非労働力人口はグラフの後半で原系列の上下の変動が小さくなっており、それに対応して加重平均型モデルとパラレル型モデルの季節変動項の変動も時間とともに弱まっている。またこれらの時系列とは逆に、完全失業者数はグラフの後半で原系列の変動が大きくなっており、これに対応して加重平均型モデルとパラレル型モデルの季節変動項の変動は時間とともに増大している。これらの結果から、原系列の変動のうちの一部が季節変動項にも反映されていることが分かる。またこの結果により、加重平均型モデルとパラレル型モデルの季節調整結果は、いずれもタンデム型に比べてやや滑らかになっている。就業者と非労働力人口では、加重平均型モデルが最も滑らかで、パラレル型モデル

はタンデム型モデルと加重平均型モデルの中間の動きをしている。

各モデルを用いて季節調整を行った場合の、AIC 及び各種パラメータの推定値をまとめたものが、表 1～表 4 である。これらの結果によると、いずれの時系列についても、加重平均型モデルと平行型モデルを用いた場合の方が、タンデム型モデルを用いた場合よりも、AIC が低くなっている。特に平行型モデルの AIC がすべての時系列において最も低くなっている。平行型モデルはタンデム型モデルと比較してパラメータ数が 5 つ増加しているものの、AIC はタンデム型モデルの場合よりも 50～60 程度減っており、当てはまりに関しては、かなり改善されているといえる。

タンデム型モデルと加重平均型モデルは、季節変動項を駆動するノイズがホワイトノイズかピンクノイズかという点で違いがある。これはパラメータ ϕ ひとつ分の違いに過ぎないものの、推定された季節調整結果の変動は、2 つのモデルで大きく異なる。これに対して力学的なシステムが全く異なる加重平均型モデルと平行型モデルの結果が似たような傾向を示していることも興味深い。これらはすべて尾崎（1997）で指摘されていることであり、そのような傾向が労働力調査の結果においても見られることが示された。

全体的に見て、タンデム型モデルでは季節調整値の変動が大きくなっている。一方、加重平均型モデルによる季節調整値は多少平滑化されすぎている印象を受ける。平行型モデルはそれらの中間の程よい動きであり、当てはまりもよいといえる。労働力調査の就業 3 状態に関して言えば、単一のノイズで季節変動項を駆動させるタンデム型のモデルよりも、複数のノイズによって季節周波数ごとの振動成分を個別に駆動させる平行型モデルの方が、季節変動の細かいパターンをうまく取り出せている可能性があると言える。

おわりに

今回は非常に限定した場合に限って、いくつかの季節変動のモデルによる季節調整値の比較を行った。分析の結果、AIC の観点からみると、平行型季節変動のモデルによる季節調整が良好な結果となった。推定するパラメータの大幅な増加というハンデがあるにも関わらず、AIC は最も低い値を示した。個々の周波数ごとの季節変動それぞれが、独立な雑音によって駆動するために、季節性をより細かく推定できた可能性がある。ただし今回の分析は、季節性が比較的安定している就業 3 状態の全国結果に対して適用した場合の結果であり、はっきりとした結論を出すには、産業・職業別や男女別などのより多くの系列に対して分析をする必要があると思われる。

今回の分析では、分析を簡単にするためにトレンドなどの次数を低次に設定している。また DECOMP で採用されているような定常 AR 項や曜日効果項についても考慮していない。これらの変動を考慮することで、当てはまりが良くなる可能性もある。水準と傾きが別々のノイズによって変化するようなトレンド項のモデルを導入することも考えられる。最近是非線形、比ガウス型モデルによる解析の研究も進んでいる。これらの手法の応用も、今後の課題である。また今回の結果と X11 などの他の手法との比較についても試みたいと考えている。

参考文献

- [1] 石黒真木夫, ベイズ型季節調整プログラム BAYSEA, 統計数理, 第 36 巻, 1986
- [2] 尾崎統, 動的 X11 モデルと非線形季節調整 I、II, 統計数理, 第 45 巻, 1997
- [3] 尾崎統, 北川源四郎 編, 時系列解析の方法, 朝倉書店, 1998

- [4] 片山徹, 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983
- [5] 北川源四郎, 時系列解析プログラミング, 岩波書店, 1986a
- [6] 北川源四郎, 時系列の分解—プログラム DECOMP の紹介—, 統計数理, 第 34 巻, 1986b
- [7] 北川源四郎, 季節調整プログラム DECOMP とその後の展開, 統計数理, 第 45 巻, 1997
- [8] 北川源四郎, 小西貞則「情報量基準」, 朝倉書店, 2004
- [9] 北川源四郎, 時系列解析入門, 岩波書店, 2005
- [10] A.C.ハーベイ 著 国友直人 山本拓 編, 時系列モデル入門, 東京大学出版会, 1985
- [11] 佐藤整尚, Web DECOMP の紹介—WWW 上で行う季節調整システム—, 1997
統計数理, 第 45 巻, 1997
- [12] 杉原敏夫, 経営・経済のための時系列分析と予測, 税務経理協会, 1994
- [13] 統計数理研究所 Web-DECOMP (アドレス: <http://ssnt.ism.ac.jp/inets2/title.html>)
- [14] G.Kitagawa, and W.Gersch., A smoothness priors state space approach to the modeling of time series with trend and seasonality, The Journal The American Statistical Association, 79, 1994.

図表

図 1 就業者数の季節調整結果

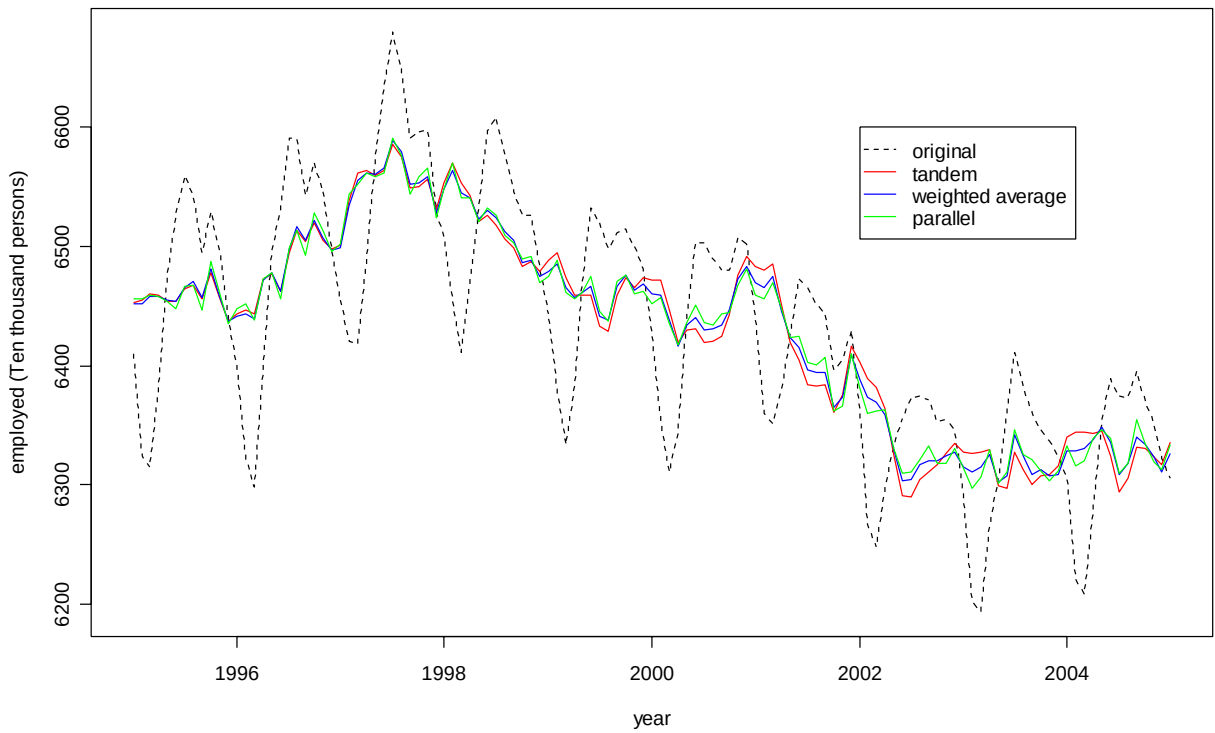


図 2 就業者数の季節変動

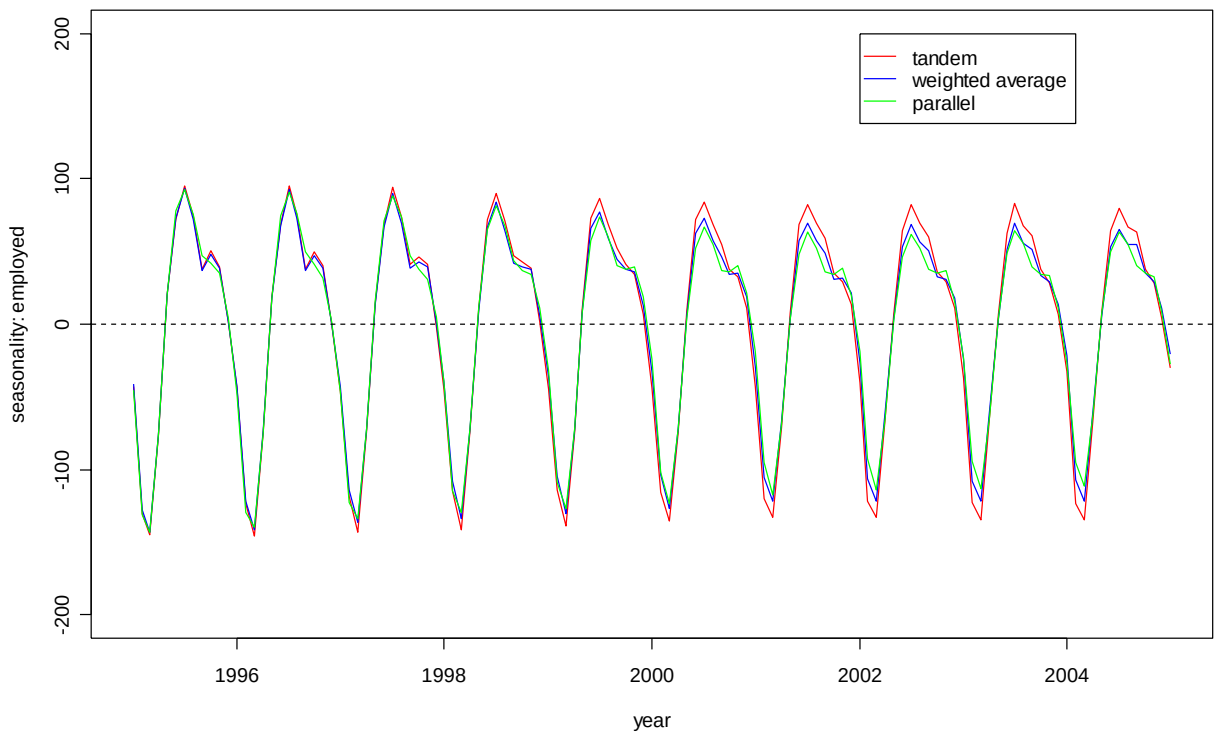


図3 完全失業者数の季節調整結果

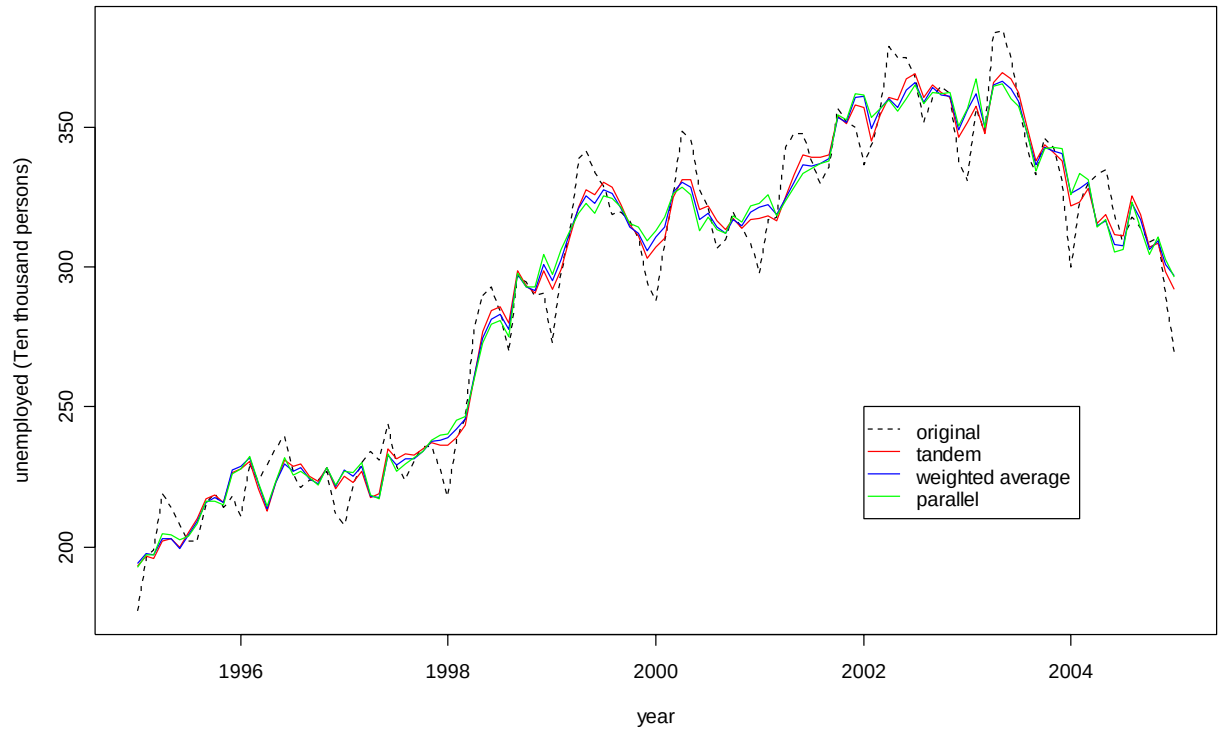


図4 完全失業者数の季節変動

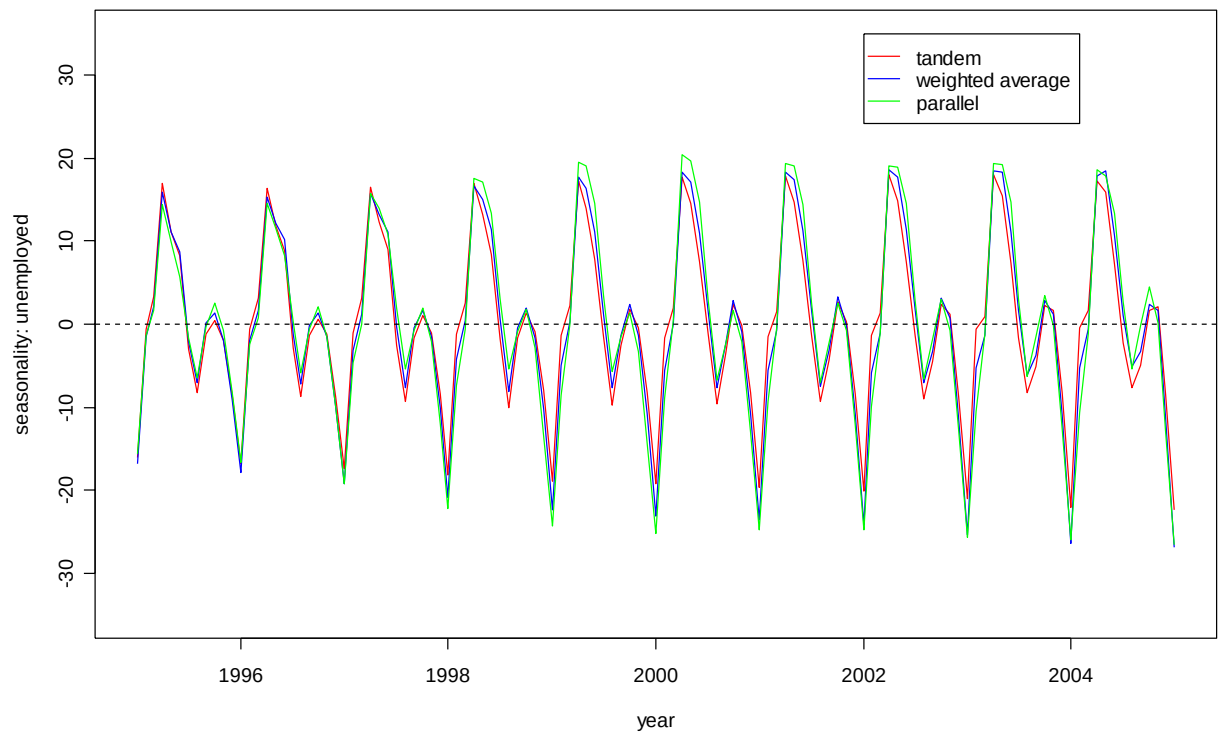


図5 非労働力人口の季節調整結果

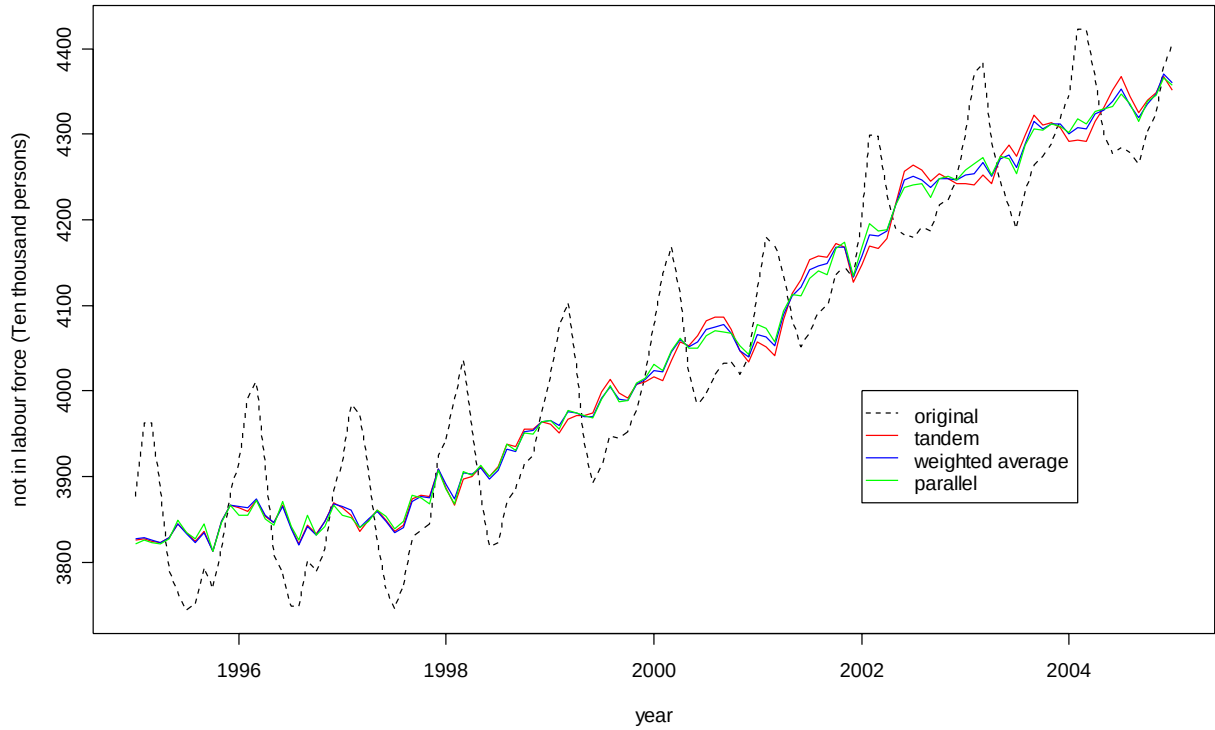


図6 非労働力人口の季節変動

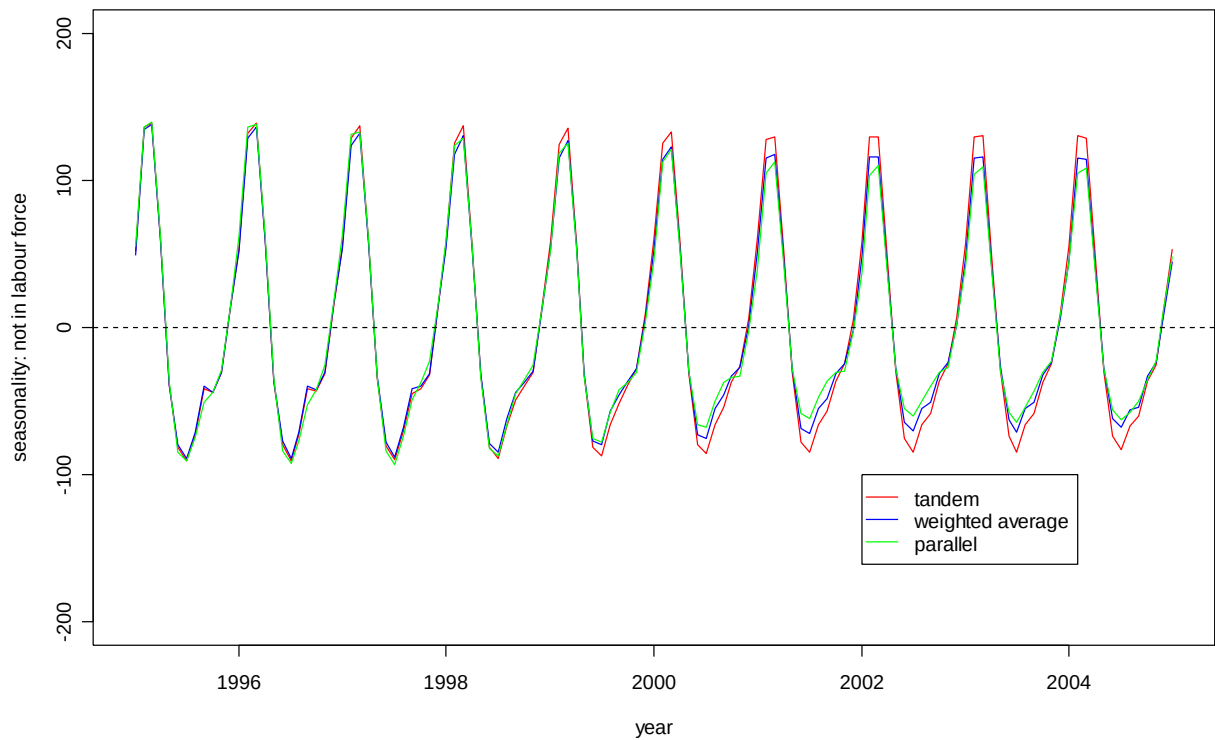


表 1 就業者数 パラメータ推定結果

	tandem	weighted average	parallel
tau1	0.9999996	1	0.9999999
tau21	0.1393238	0.2771239	9.444677E-03
tau22	—	—	0.01064509
tau23	—	—	1.818776E-07
tau24	—	—	1.077925E-10
tau25	—	—	1.372306E-04
tau26	—	—	2.880193E-10
sig2	135.7297	117.8941	126.5207
phi	—	0.8999994	—
log-likelihood	-1567.341	-1538.379	-1529.32
AIC	3138.682	3082.757	3072.641

表 2 完全失業者数 パラメータ推定結果

	tandem	weighted average	parallel
tau1	0.99999875	0.9999998	0.9999808
tau21	0.05082051	0.1371198	7.724665E-03
tau22	—	—	7.283361E-03
tau23	—	—	1.034163E-03
tau24	—	—	1.281157E-07
tau25	—	—	4.667289E-10
tau26	—	—	2.651903E-05
sig2	16.71939	14.81266000	14.34839000
phi	—	0.8999988	—
log-likelihood	-1179.783	-1160.918	-1147.949
AIC	2363.566	2327.836	2309.897

表 3 非労働力人口 パラメータ推定結果

	tandem	weighted average	parallel
tau1	0.99999953	1	0.9999713
tau21	0.08158575	0.2605237	0.01630494
tau22	—	—	0.01709464
tau23	—	—	3.877839E-03
tau24	—	—	1.123880E-06
tau25	—	—	3.380603E-04
tau26	—	—	3.256602E-13
sig2	121.3291	102.6192	100.1332
phi	—	0.8999996	—
log-likelihood	-1534.031	-1512.493	-1503.89
AIC	3072.062	3030.986	3021.78

※ 表中の tau1、tau2、sig2 はそれぞれ、トレンド項、季節変動項、不規則変動項のノイズの分散を表している。ただしトレンド項と季節変動項の分散パラメータは、不規則変動の分散との比で表されている。

付録

今回の推定に用いたプログラム

```
#####  
## Title: Seasonal Adjustment by State Space Model  
## Method: State Space Model & kalman Filter  
## Date: 2005/4/15  
## Software: R  
## Reference: 北川源四郎 (1999)「時系列解析プログラミング」岩波書店. p.279 - 294  
#####  
  
#  
# ... Lord Package ...  
#  
  library(ts)  
  library(MASS)  
  
#  
# ... Seasonal Adjustment by State Space Model ...  
#  
  Adjust <- function (model, period, initpar)  
  {  
    SetModel(model)  
    Y <- Ydt[period]  
    leng <- length(Y)  
    initpar <- Init(initpar)  
    lastpar <- Opt(initpar, model)  
    Kalman(lastpar, "sm", model)  
  }  
  
#  
# ... Kalman Filter: One Step Ahead Prediction and Filter ...  
#  
  Kalman <- function(par, type, model)  
  {  
    if (type == "sm") {  
      XPS <- XFS <- matrix(NA, sdim, leng)  
      VPS <- VFS <- array(NA, c(sdim, sdim, leng))  
    }  
    F <- F0  
    if (model == "WA") {  
      param <- exp(par[1:2]) / (exp(par[1:2]) + 1)  
      phi <- 0.9 * exp(par[3]) / (exp(par[3]) + 1)  
    }  
  }  
}
```

```

      F[2, 2:sdim] <- F[2, 2:sdim] + phi
    } else {
      param <- exp(par) / (exp(par) + 1)
    }
    Q <- diag(param)
    XF <- X0
    VF <- V0
    wrk1 <- wrk2 <- 0
    for (iter in 1:leng) {
      XP <- F %**% XF
      VP <- F %**% VF %**% t(F) + G %**% Q %**% t(G)
      r <- as.vector(Y[iter] - H %**% XP)
      d <- as.vector(H %**% VP %**% t(H) + 1)
      KG <- VP %**% t(H) / d
      XF <- XP + KG * r
      VF <- VP - KG %**% H %**% VP
      if (iter > 36) {
        wrk1 <- wrk1 + (r ^ 2) / d
        wrk2 <- wrk2 + log(d)
      }
      if (type == "sm") {
        XPS[, iter] <- XP
        XFS[, iter] <- XF
        VPS[, , iter] <- VP
        VFS[, , iter] <- VF
      }
    }
    N <- leng - sdim
    sig2 <- wrk1 / N
    lik <- -0.5 * (N * log(2 * pi * sig2) + wrk2 + N)
    if (type == "lk") {
      return(-1 * lik)
    }
    res <- Smooth(F, model)
    AIC <- -2 * lik + 2 * length(par)
    if (model == "WA") {
      param <- c(param, phi)
    }
    names(param) <- Label(model)
    list(TCI = res$TCI, S = res$S, par = param, sig2 = sig2,
        AIC = AIC, LKHD = lik)
  }
}

```

#

```

# ... Fixed Interval Smoother ...
#
Smooth <- function(F, model)
{
  TCI <- S <- rep(NA, leng)
  XS <- XFS[, leng]
  if (model == "parallel") {
    S[leng] <- sum(XS[c(2, 4, 6, 8, 10, 12)])
  } else {
    S[leng] <- XS[2]
  }
  TCI[leng] <- Y[leng] - S[leng]
  for (iter in (leng - 1):1) {
    XP <- XPS[, iter + 1, drop = FALSE]
    XF <- XFS[, iter, drop = FALSE]
    VP <- VPS[, , iter + 1]
    VF <- VFS[, , iter]
    A <- VF %*% crossprod(F, ginv(VP))
    XS <- XF + A %*% (XS - XP)
    if (model == "parallel") {
      S[iter] <- sum(XS[c(2, 4, 6, 8, 10, 12)])
    } else {
      S[iter] <- XS[2]
    }
    TCI[iter] <- Y[iter] - S[iter]
  }
  list(TCI = TCI, S = S)
}

```

```

#
# ... Nonlinear Numerical Optimizer ...
#
Opt <- function(initpar, model){
  fun <- function(par) Kalman(par, "lk", model)
  res <- optim(initpar, fun,
    control = list(trace = 2, maxit = 1000))
  res <- optim(res$par, fun, method = "BFGS",
    control = list(trace = 2, maxit = 100))
  res$par
}

```

```

#

```

```

# ... Set State Space Model ...
#
SetModel <- function (model)
{
  sdim <- 12
  if (model == "WA") {
    sdim <- sdim + 1
  }
  F0 <- matrix(0, sdim, sdim)
  H <- t(rep(0, sdim))
  F0[1, 1] <- H[, 1:2] <- 1
  if (model == "parallel") {
    for (i in seq(2, 10, by=2)) {
      F0[i + 1, i] <- H[, i + 2] <- 1
      F0[i, i + 1] <- -1
      F0[i, i] <- 2 * cos(pi * i / 12)
    }
    F0[sdim, sdim] <- -1
    gdim <- 7
  } else {
    gdim <- 2
    F0[row(F0) == col(F0) + 1] <- 1
    F0[2, 2:sdim] <- -1
    F0[2, 1] <- 0
    if (model == "WA") {
      F0[2, sdim] <- 0
    }
  }
  G <- matrix(0, sdim, gdim)
  G[1, 1] <- 1
  for (k in 2:gdim) {
    G[2 * (k - 1), k] <- 1
  }
}

#
# ... Label of the Estimated Parameter ...
#
Label <- function (model)
{
  switch (model,
    "WA" = return(c("tau1", "tau2", "phi")),
    "tandem" = return(c("tau1", "tau2")),
    "parallel" = return(c("tau1", "tau21", "tau22",
      "tau23", "tau2S4", "tau25", "tau26"))
  )
}

```

```

}

#
# ... Set Initial State and Transform Starting Value ...
#
Init <- function (initpar)
{
  X0 <- matrix(rep(0, sdim))
  X0[1] <- mean(Y[1:12])
  V0 <- diag(100000 * var(Y[1:12]), sdim)
  log(initpar / (1 - initpar))
}

#
# ... Read Data and Estimate ...
#
Ydt <- scan("D:/emp.txt")
result1 <- Adjust("tandem", 1:360, c(0.8, 0.0001))
result2 <- Adjust("WA", 1:360, c(0.8, 0.0001, 0.75))
result3 <- Adjust("parallel", 1:360, c(0.8, rep(0.0001, 6)))

Y0 <- ts(Y[240:360], start = c(1995, 1), frequency = 12)
TCI1 <- ts(result1$TCI[240:360], start = c(1995, 1), frequency = 12)
TCI2 <- ts(result2$TCI[240:360], start = c(1995, 1), frequency = 12)
TCI3 <- ts(result3$TCI[240:360], start = c(1995, 1), frequency = 12)
plot(Y0,type="l", main = "employed", xlab="year",
     ylab="employed (Ten thousand persons)", lty=2)
points(TCI1, type = "l", col = "red")
points(TCI2, type = "l", col = "blue")
points(TCI3, type = "l", col = "green")
legend(2002,6600, c("original", "tandem", "weighted average",
  "parallel"), col = c("black", "red","blue","green"),
  lty = c(2, 1, 1, 1), merge = TRUE)

```