統計研究彙報　第76号　2019年３月　（71-80）

同一母集団からの複数調査による母集団推定値の合成方法について

松本　正博[†]

Synthetic Estimation of Population Mean from Plural Sample Surveys

MATSUMOTO Masahiro

本稿は、同一母集団から異なった標本調査により得られる同一の独立な母集団の推定値を用いて、個々の標本調査の推定値よりも精度の高い母集団の推定値を得るための合成ウエイトを作成する方法について、単純無作為抽出による標本を用いる場合と、それを拡張し単純無作為抽出を前提しない場合について提案するものである。

また、実際に総務省の家計調査及び家計消費状況調査について提案手法を適用し、両調査に共通する調査品目について、一世帯当たり支出額の推定値を合成するとともにその分散を算出し、単に標本サイズを用いた加重ウエイトを用いた場合よりも精度が高い合成推定値が得られることを確認した。

キーワード：標本調査、推定値の合成、推定値の分散、加重平均

In this study, we propose a method of synthesizing estimates from plural sample surveys of a target population.　First, we show the method for the case of simple random sampling, and then it is extended to otherwise case.

We also applied the proposed method to the Family Income and Expenditure Survey and the Survey of Household Economy both conducted by the Ministry of Internal Affairs and Communications.　We selected a few items common in the two surveys, synthesize the estimates of the average of household expenditure for those items, and calculate their valiance.　The results shows the proposed method successfully provide the estimates with higher accuracy compared to the weighted mean by each sample size.

Key words: Sample survey, Synthetic estimates, Variance of estimates, Weighted mean

[†] 独立行政法人統計センター情報技術センター技術研究開発課

1. はじめに

本稿は、複数の標本調査において同一とみなせる標本調査の項目の母集団推定値を合成して、より精度の高い精度の母集団推定値を得る方法を提案するものである。

現在、標本理論に基づいた様々な調査による公的統計の結果が公表され、その標本誤差についてもほとんどの標本調査について公表されている。しかし、利用者にとって十分な精度が得られない一方で、調査実施者も各種の制約により標本サイズの拡大が困難な場合があり、それを補助するために別の調査を実施することがある。その例の一つが、総務省の家計調査と家計消費状況調査で、両調査で定義が同一とみなせる品目の支出の推定値を加重平均により合成した結果として、家計消費指数が平成 29 年分まで総務省により公表されている。また、統計利用者が、単一の調査の推定精度がその目的に十分でないと判断し、同一の事項を推定しているとみなせる複数の推定値を加重平均することにより合成し、使用する場合もあるかもしれない。

今後、統計のより良い利用にあたり、その精度向上を目的に、複数の推定値の合成は有益な手段としてより広く実施されるべきであり、実際に複数の調査の結果を利用する統計の作成も予定されている。しかし現在のところ、個々の標本調査の推定値とは異なり、合成した推定値の精度は公表されておらず、合成時に使用する加重平均のウエイトが精度向上に適切であるかどうかが不明であり、統計作成者及び統計利用者の双方の観点からは必ずしも満足がいくものではない。そこで、より良い精度で複数の推定値を合成し、またその精度の推定をすることを目的に、本研究を行った。

第 2 節では、同一母集団からの複数標本調査の同一項目の推定値について、精度の高い合成推定値を得るための合成ウエイトの作成方法について、まず単純無作為抽出の標本について解説し、次にそれを単純無作為抽出以外の場合について拡張する。第 3 節では、実際に家計調査と家計消費状況調査の調査票情報を用いて、共通する複数の調査項目の一世帯当たり支出額の平均値について、第 2 節で解説した方法を適用する。この結果、標本サイズをウエイトに使用して合成した推定値よりも、提案手法による合成ウエイトを使用した推定値の方が、高い精度を達成できることを確認できた。第 4 節でこの実験結果をとりまとめ、第 5 節で考察を述べる。

2. 方法論

本節では、提案手法について解説する。まず、標本が単純無作為抽出である場合について 2.1 節で扱い、2.2 節においてそれを無作為抽出ではない場合について拡張する。

なお、2.1 節の先行研究として Graybill and Deal (1959)があり、それぞれの推定値の分散から算出するウエイトによって最小分散の不偏変推定量が得られるが、そこで安定的なより良い不偏推定量を求める条件として、二つの標本それぞれにおいて、観測度数が 9 より大であることを挙げている。すなわち、観測度数（の期待値）が少ない場合は、推定値の分散の推定誤差が大きいことから、安定的なより良い不偏推定量が得られなくなる場合があることを意味している。

ただし、本節では、簡略化のため、推定値の分散の推定誤差などについては省略し、Graybill and Deal (1959)や石井 (1992)などを参考に、標本調査の適用について応用したものである。

2.1 単純無作為抽出の二標本からの推定値の合成

ある母集団 T の変数 X を考える。変数 X の母分散を σ^2 とする。そして、母集団 T から非復元無作為抽出した標本 s による X の線形推定量を X_s 、その分散及び標準誤差を V_s

及び SV_s として、抽出率が十分に低い場合のV_s 及び SV_sの近似値は、式 (2.1)が得られる。また、これにより(2.2)が導かれる。

$$V_s \approx \frac{\sigma^2}{n_s}; \qquad SV_s \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n_s}} \tag{2.1}$$

$$n_s \approx \frac{\sigma^2}{V_s} \tag{2.2}$$

ここで、母集団 T から非復元単純無作為抽出した独立な二つの標本 A 及び B において、X の線形推定量 X_A 及び X_B が得られているとき、X_A と X_B の加重平均により合成した推定値 X_{AB} について、最も分散が小さくなる（精度の高くなる）加重平均のためのウエイト（以下「合成ウエイト」という）と、合成推定値の分散の推定問題を考える。このとき、標本 A 及び B のサイズはそれぞれ n_A 及び n_B とする。なお、標本 A も B も同一の母集団 T から単純無作為抽出されているため、母集団 Tと標本 A 及び B の母分散の期待値及び推定量の期待値は等しい。ただし、標本サイズの相違により、それぞれの推定値の分散V_AとV_Bは相違する。

二つの標本 A 及び B を副標本とする一つの標本 s を考え、そのサイズを

$$n_S = n_A + n_B \approx \frac{\sigma^2}{V_A} + \frac{\sigma^2}{V_B} \tag{2.3}$$

とする。標本 s から副標本 A 及び B を抽出したものと考えると、合成のための加重平均ウエイトは部分標本の要素の抽出確率であり、その逆数が要素の線形乗率となる。母分散や推定量の期待値が等しいため、推定値の分散は、各要素の抽出確率（あるいは線形乗率）の分布によることとなる。

石井 (1992) は、標本の配分による標本有効率（デザイン効果の逆数にあたる）について、母集団を平均値及び分散が等しい部分母集団に分け、標本サイズを変えた場合の値を算出しているが、その算出式から、等確率（等乗率）の場合に標本有効率が最大値の 1 となり、推定値の分散が最小化することが導ける。詳細は、本稿の末尾に参考 1 としてまとめた。

標本の抽出確率が等しい場合に、推定値の分散を最小化する合成ウエイトは、式 (2.4) により得られる。

$$w_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{\sigma^2}{V_A} \bigg/ \left(\frac{\sigma^2}{V_A} + \frac{\sigma^2}{V_B}\right) = \frac{V_B}{V_A + V_B}; \qquad w_B = (1 - w_A) \tag{2.4}$$

このとき、

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{w_A}{w_B} = \frac{\sigma^2 / V_A}{\sigma^2 / V_B} = \frac{V_B}{V_A} \tag{2.5}$$

よって、X の推定値 X_{AB} の分散は次のようになる。

$$V_{AB} = \frac{\sigma^2}{n_A + n_B} = \sigma^2 \bigg/ \left(\frac{\sigma^2}{V_A} + \frac{\sigma^2}{V_B}\right) = 1 \bigg/ \left(\frac{1}{V_A} + \frac{1}{V_B}\right) \tag{2.6}$$

式 (2.6) は、X の推定値 X_{AB} の分散が、$n_A + n_B$の標本サイズ、すなわち、n_Sを標本サイズとする非復元単純無作為抽出による標本から得られる精度と同じであることを示している。

また、式 (2.4)、(2.5) 及び (2.6) から、標本AとB の推定値の分散が推定できれば、母分散の推定値や標本サイズが不明である場合も、精度の高い X の推定値 X_{AB} やその分散を求めることができる。

2.2 単純無作為抽出ではない場合の推定値の合成

前節で、標本 A 及び B が非復元単純無作為抽出の場合の推定値の合成について検討した。本節では、標本 A 及び B が非復元単純無作為抽出ではない場合についても、同様に推定値を合成する方法について考える。

公的統計の標本調査の場合、調査客体の負担を考慮しているため、標本抽出法は非復元抽出を前提として問題ない。しかし調査の結果表章精度等を考慮するため、層化や多段抽出等の標本設計が行われており、単純無作為抽出であることはほとんど期待できない。その場合、デザイン効果が１であることは保障されないため、式 (2.4) 及び (2.6) の n_A や n_B へ調査の標本サイズをそのまま代入するのは適切ではない。

しかし、式 (2.4) によれば、標本サイズのみを用いるか、標本サイズを用いずに推定値 X_A と X_Bの分散である V_A と V_B のみを用いて合成ウエイトを求めることができる。また、推定値 X_A と X_B の標準誤差 SV_A、SV_B と母分散 σ^2 を用いて、単純無作為抽出の場合に同じ標準誤差が得られる疑似的な標本サイズ $\tilde{n}_A$ 及び $\tilde{n}_B$ を求めることができる。これを 2.2 節の n_A 及び n_B と置き換えることにより、前節と同様に推定精度の高い X の推定値 X_{AB} を得ることも可能である。また、擬似的な標本サイズを使用する場合は、標本（調査）数が二つよりも多い場合への推定値の合成への拡張が単純に可能となる。

3. 家計消費指数で使用されている合成方法との比較

本節では、総務省の家計消費指数が採用する、家計調査及び家計消費状況調査を用いた一世帯当たり支出額を合成する方法と、第 2 節にある提案手法を比較する。家計消費指数での方法の基本的な考え方は、各調査の標本サイズにより次のように加重平均して推定値を合成する。

$$X_{AB} = \frac{n_A \cdot X_A + n_B \cdot X_B}{n_A + n_B}$$

まず、2017 年の家計調査と家計消費状況調査に共通する調査品目をいくつか選択し、二人以上の世帯と単身世帯別に一世帯当たり支出額を集計するとともに、その分散も算出した。その結果を表 1 に示す。なお、選択した調査品目は、能登(2007)では、両調査の調査方法の相違に関わらず家計消費状況調査において分類誤りが発生する可能性が極めて低く、かつ購入頻度の乖離がみられる（家計調査の方が頻度か低い）こと、などの理由から、一世帯当たり支出額全体を求めるに当たっては、家計消費状況調査の支出額の水準に合わせることとしたものである。

この数値は総務省の公表値ではなく、調査票情報を用いて独自に集計を行い、その表章品目名は家計消費状況調査に準拠した。また、単身世帯の集計は、年平均算出用の乗率を使用している。そしてこの指数化した一世帯当たり支出額とその推定値の分散は、2017 年１～12 月の各月の値の算術平均値である。

指数化した両調査の指数化した一世帯当たり支出額には大きな相違があり、両者の推定値の分散も大きい。推定値の分散を比較すると、家計調査と家計消費状況調査では家計調査がより

大きく、二人以上世帯と単身世帯では単身世帯が大きい。ただし、両調査の指数化した一世帯当たり支出額の相違は、両調査の推定値の分散を考慮すると必ずしも有意とは言えない。これは、主に家計調査の非標本誤差に起因すると考えられる購入頻度の乖離があっても、家計調査の指数化した一世帯当たり支出額は、家計消費状況調査のそれと同じものを推定しているものと考えることができる。

次に、総務省が公表している平成 29 年の家計消費指数で使用される家計調査と家計消費状況調査の集計世帯数によるウエイト（標本サイズによるウエイト。なお、各調査の毎月の集計世帯数はおおよそ、この 100 倍）と、第 2 節で述べた両調査の推定値の分散を使って式 (2-4) により算出した推定値の分散が最小になるウエイトを算出した結果を表２に示す。

そして、作成した最小分散ウエイトを用いて、二人以上の世帯・単身世帯別に、選択した品目について推定値の合成を行った結果を、単純に各調査の集計世帯数をウエイトとして合成した推定値と共に表３に示す。

表２の集計世帯数ウエイトと最小分散ウエイトを比較すると、二人以上世帯では家計消費状況調査で最小分散ウエイトが高い傾向になり、単身世帯ではその逆の傾向が見られる。

表３の結果をみると、最小分散ウエイトの推定値の分散が、集計世帯数ウエイトのそれよりすべてにおいて小さく、また、家計消費状況調査単体よりも小さくなっており、合成により精度の向上が確認できた。集計世帯数ウエイトでは、二人以上世帯の冷蔵庫など、家計消費状況調査単独の最小分散ウエイトよりも推定値の分散がやや大きくなるものがあり、合成しても精度が向上していないものも存在する。

表１. 家計調査と家計消費状況調査の一世帯当たり支出額と推定値の分散 (2017 年平均)

	家計調査		家計消費状況調査	
	支出額 2015 年＝100	推定値の分散	支出額 2015 年＝100	推定値の分散
二人以上の世帯				
冷蔵庫 *1	108.7	803	94.8	100
掃除機 *2	86.8	309	98.1	68
洗濯機 *3	119.2	902	109.4	127
エアコン	93.6	500	111.6	120
テレビ	105.6	1,153	97.9	125
単身世帯				
冷蔵庫 *1	125.9	30,069	83.3	3,320
掃除機 *2	90.5	7,630	137.4	5,054
洗濯機 *3	156.4	28,533	129.1	20,999
エアコン	133.0	19,114	115.7	2,546
テレビ	114.4	23,928	123.8	26,577

*1: 冷凍庫を含む
*2: ロボット型・スティック型・ハンディ型を含む
*3: 乾燥機、脱水機を含む

表２．家計調査と家計消費状況調査の合成ウエイト(2017 年平均)

	集計世帯数ウエイト		最小分散化ウエイト	
	家計調査	家計消費状況調査	家計調査	家計消費状況調査
二人以上の世帯				
冷蔵庫 *1	80	200	0.110	0.890
掃除機 *2	80	200	0.181	0.819
洗濯機 *3	80	200	0.123	0.877
エアコン	80	200	0.193	0.807
テレビ	80	200	0.098	0.902
単身世帯				
冷蔵庫 *1	7	20	0.099	0.901
掃除機 *2	7	20	0.398	0.602
洗濯機 *3	7	20	0.424	0.576
エアコン	7	20	0.118	0.882
テレビ	7	20	0.526	0.474

*1: 冷凍庫を含む
*2: ロボット型・スティック型・ハンディ型を含む
*3: 乾燥機、脱水機を含む

表３．家計調査と家計消費状況調査の加重平均値による一世帯当たり支出額と推定値の分散
(2017 年平均)

	集計世帯数ウエイト		最小分散化ウエイト	
	支出額 2015 年＝100	推定値の分散	支出額 2015 年＝100	推定値の分散
二人以上の世帯				
冷蔵庫 *1	98.7	116	96.3	89
掃除機 *2	94.9	60	96.1	56
洗濯機 *3	112.2	138	110.6	111
エアコン	106.5	102	108.2	97
テレビ	100.1	158	98.7	113
単身世帯				
冷蔵庫 *1	94.3	3,843	87.5	2,990
掃除機 *2	125.3	3,286	118.7	3,040
洗濯機 *3	136.1	13,440	140.6	12,097
エアコン	120.2	2,682	117.7	2,247
テレビ	121.4	16,191	118.9	12,591

*1: 冷凍庫を含む
*2: ロボット型・スティック型・ハンディ型を含む
*3: 乾燥機、脱水機を含む

4.　結論

本研究では、同一母集団から独立に抽出された異なる二つの調査標本から得られた、同じ母集団推定量についてのそれぞれの推定値を利用して、より分散の小さい、つまり精度の高い推定値の作成方法を提案した。そして、その方法により、実際に家計調査と家計消費状況調査の調査票情報を用いて、合成ウエイトを算出し、それにより合成した推定値と、その分散の推定結果を試算した。その結果、提案手法は、単純に標本サイズをウエイトとして合成した推定値よりも、推定精度の高い推定値が作成できることが確認された。

この結果から、推定値の精度を高めるという目的を達成するためには、標本調査での標本誤差のほか、それを加工して得られた推計値についても、その分散の推定が必要であることが示された。推定値がその分散とともに提供されることにより、その推定の定量的な比較評価が可能になる。

5.　考察

より精度の高い統計数値を作成するためには、ただ標本サイズを大きくするよりも、まず定量的な比較基準に基づき、推定値の分散を最小化する合成方法を開発することなどにより、比較的費用をかけず早期に統計数値の改善を図ることのできる可能性を、本研究の結果は示唆している。

さらに、比較基準としての推定値の分散（標本誤差）の推定の重要性は明らかで、推定値ともにその分散を提供することにより、これらを用いたより効率的で精度の高い統計が作成できる可能性を広げることができる。

［参考１］標本の有効率

石井 (1992) は、部分母集団の平均及び分散が等しい場合に、調査客体数 n の各部分標本への配分から標本の有効率（デザイン効果の逆数）を算出する式を次のとおり表現した。標本の有効率を η は、部分母集団の数を m、比例配分値（部分母集団の標本サイズに比例した調査客体数）を k とする。

$$\eta = \frac{n}{\sum_i^m \frac{k_i^2}{n_i}}$$

この式の、分母 $\sum_i^m k_i^2/n_i$ を最小化すれば、効率が最大になり、つまり推定値の分散が最小になることがわかる。ここで、$m = 2$ として上式を変形すると、

$$\sum_i^2 \frac{k_i^2}{n_i} = \frac{k_1^2}{(k_1 + \Delta n)} + \frac{k_2^2}{(k_2 - \Delta n)}$$

となり、$\Delta n = 0$、すなわち等確率（等ウエイト）とした場合、分母と分子が等しく効率が 1 となり、推定値の分散が最小になることがわかる。

［参考２］合成ウエイト

推定値の分散を最小化する合成ウエイトについては、次のように導くこともできる。

最小化母集団 U を部分母集団 A と B に $w{:}(1-w)$ の比率に分割するとき、下式が成立する。

$$V_U = V_A w^2 + V_B(1-w)^2 = V_A w^2 + V_B - 2V_B w + V_B w^2$$

これを w について微分すると、

$$dV_U/w = 2(V_A + V_B)w - 2V_B$$

$dV_U/w = 0$ として、最も分散の推定値が最小（標本の有効率が最大になる）wを求める。

$$0 = 2(V_A + V_B)w - 2V_B$$

よって、

$$w = V_B/(V_A + V_B)$$

が得られ、式（2.4）と一致する。

参考文献

[1] 浅井晃 (1987), 調査の技術, 日科技術連出版社.

[2] 石井達男 (1992), サービス業基本調査の標本設計について, 統計研究彙報第 50 号, 総務省統計研修所, 50, 1-50.

[3] 土屋隆裕 (2010), 概説標本調査法, 朝倉書店.

[4] 能登克己 (2007), 家計消費指数について, 統計研究彙報第 64 号, 総務省統計研修所, 27-64.

[5] 三浦由己 & 井出満 (1970), 標本調査法, 一粒社.

[6] E. L. Lehmann (1981), “Theory of Point Estimation, Wiley, 58-59.,1-506.

[7] F. A. Graybill and R. B. Deal (1959), “Combining Unbiased Estimators”, Biometrics.