奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

統計を理解するための学び直し（その 10）加法

【加法とは】
　加法（たし算）の定義について、以前、統計図書館コラム№P12「統計を理解するための学び直し（その８）乗法」の執筆の際、乗法の定義でお世話になった薗村宗太郎 編「新撰普通算術　上巻」をここに紹介します。これまでの人生で、加法そのものの定義についてちゃんと調べたことがなかったので･･･乗法の定義を調べたときと同じくらい新鮮な感じがしました。
　本稿では、加法についてのトピック(話題)をいくつか調べてみましたので、紹介します。

（加法の定義）
　加法とは二個以上の**衆数**にして其類を同うするものを合わせて一数となす法なり而して此一数を称して和という。

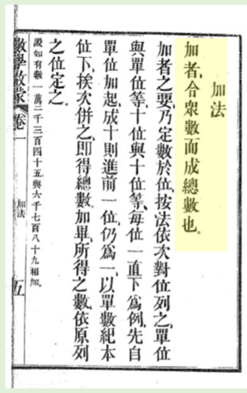
【出典】薗村宗太郎 編「新撰普通算術　上巻」（明治 34 年 1901 年）(国立国会図書館デジタルコレクション)

余談「**衆数**」は、筆者の人生で初めてお目にかかった用語で、「衆数」の用例のある文献を調べたところ『数学啓蒙』*に出会いました。同書における加法の説明で「加者合衆数而成総数也」とあり、意訳すると「たし算とは、二つ以上の数(numbers)を合わせること、即ち、総数ができあがることである。」となります。
* 『数学啓蒙』は、イギリス人宣教師偉烈(アレキサンダー・ワイリー)の著書。同書は、清国において西洋算術を漢語で紹介したもので、これが我が国においても出版(明治 3 年 1870 年) されました。
　【参考資料】小倉金之助 著『近代日本の数学』（昭和 31 年 1956 年）、田中 伸明・上垣 渉「『数学啓蒙』,『筆算訓蒙』,『筆算題叢』及び西洋算術書の比較研究」(数学教育史研究/14 巻(2014 年)

参考国立国会図書館デジタルコレクションの『**数学啓蒙　2 巻**』のタイトル中「2 巻」とありますが、目次とコンテンツを確認したところ巻一と巻二で構成されていることが分かりました。「第２巻」という意味ではなく「巻一と巻二の２巻セット」という意味であることが分かりました。同書は、**早稲田大学図書館の古典籍総合データベースでも閲覧可能**です。同データベースでは、タイトルが『数学啓蒙．巻 1-2』となっていました。ちなみに、同書は同データベースに３件登録されており、そのうち１件は**初代内閣統計局長**を務めた花房直三郎氏の**ご遺族の寄贈による花房文庫**に係るコンテンツでした。

『**数学啓蒙**　2 巻』（抜粋）

（標題）


加法
加者、合衆數而成總數也。
加者之要、乃定數於位、按法依次對位列之、單位與單位等、十位與十位等、毎位一直下爲例、先自單位加起、成十則進前一位、仍爲一、以單數紀本位下、挨次併之、即得總數、加畢、所得之數、依原列之位定之。
設如有數一萬二千三百四十五與六千七百八十九相加。
數學啓蒙　卷一　加法　五

【画像】国立国会図書館デジタルコレクション

【エジソンの小学生時代のエピソード】
　発明王エジソンの伝記によれば、小学生のとき、たし算の結果に疑問を持ちましたが、先生から納得のいく説明は得られなかったエピソードがあります。先生としては、当たり前のことを説明するまでもないと考えたのかもしれません。確かに、例えば、1 個の粘土と 1 個の粘土を合わせたら、大きな 1 個の粘土になるのに。なんで 1+1=2 となるのか。･･･と問われたら、1 個の粘土と 1 個の粘土を合わせたら、確かに大きな 1 つの粘土になるけど、その大きな粘土は元の粘土の何個分になるか考えてみて･･･と返すほうが、いいように思います（小学校における算数教育に関する専門的知見が皆無の筆者による無責任な感想です。）。
　ところで、そもそも、1+1=2 について、なんでそうなるのか気にもしたことがなかったので、新井紀子『数学は言葉』のほか、インターネットのサイト（動画サイトを含む）をいくつか参照してみました。これらの文献等を参考に筆者が自分勝手にアレンジ、脚色してまとめてみましたので次項に紹介します。

【なんで 1+1=2 なのか･･･ペアノの公理及びペアノの算術による証明の考え方】

その１		その２	
suc(0)=1、suc(suc(0))=2 と定義		suc(0)=1、suc(1)=2 と定義	
1+1=suc(0)+suc(0)	定義より=1+1 ＝「0 の後者」+「0 の後者」	1+1=1+suc(0)	定義より=1+1 ＝1+「0 の後者」
=suc(suc(0)+0)	＝「0 の後者+0」の後者	=suc(1+0)	＝「1+0」の後者
=suc(suc(0))	＝「0 の後者」の後者	=suc(1)	＝１の後者
=2	定義より suc(suc(0))=2	=2	定義より suc(1)=2

ペアノの公理における自然数の定義

次の１から５のすべてを満たすものを自然数と定義しています。

1　$0 \in \overset{\text{自然数}}{\mathrm{N}}$	ゼロは自然数。 余談 ペアノの公理でゼロは自然数としています。筆者は、ゼロは自然数でないと予断しているので、法令でいえば「みなし規定」(カテゴリーに含まれないものを含まれるものとみなす)に相当と自分を説得しました。
2　$\forall n \in \mathrm{N}$ について $suc\,(n) \in \mathrm{N}$ ※suc (n)：自然数 n の後者関数(successor function)	すべての自然数には自然数の後者が存在。
3　$\forall n \in \mathrm{N}$ について $suc\,(n) \neq 0$	ゼロはどんな自然数の後者にもならない。
4　$\forall n, m \in \mathrm{N}$ について $suc\,(n) = suc\,(m)$ ならば $n=m$	二つの自然数の後数が同じであれば、元の二つの数は同じ。
5　$\forall E \subseteq \mathrm{N}$（N の部分集合 E）について $0 \in E$ かつ $\forall n \in \mathrm{N}$ について $n \in E \rightarrow suc\,(n) \in E$ ならば $E=\mathrm{N}$	ゼロがある性質を満たし、各数値の後値もその性質を満たす場合、すべての自然数はその性質を満たす。

ペアノの算術における加法（たし算）の定義

1　$\forall n \in \mathrm{N}$ について　$a+0=a$
2　$\forall n, m \in \mathrm{N}$ について　$n+suc\,(m)=suc\,(n+m)$

【雑感】
30 年ほど前にある統計調査で、その調査と他の調査を同時に実施したらコストは 1+1=2 が $1+1=x<2$ になるという議論を隣の席の人がしていたことを目の当たりにした記憶があります(式の表現方法の善し悪しは横に置いといて･･･コンセプトとしては理解できた記憶があります)。そしてそれは、現代社会における業務・システムの見直しの本質に通ずるように思いました。

【おまけ】加法に関する設問
インターネットで公開されている加法に関する設問のサムネイルを見て、筆者が有意にピックアップし、自分勝手にアレンジ、脚色して解いてみましたので、ちょっとだけ紹介します。

A―① 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512＝ $\boxed{?}$

⇒【方針】左辺=S と置き、2S－S を求める。

・解法

$S=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9$

$2S=\quad 2^1+2^2+\cdots+2^9+2^{10}$

$S=2S-S=2^{10}-2^0=1024-1=1023$

A―② 1+2+3+･･･+99+100＝ $\boxed{?}$

⇒【方針】(前提：題意は「1～100 の自然数の和」あるいは「初項 1、公差 1、項数 100 の公差数列の和」を求めるものであると理解)

左辺=S と置き、(昇順の S＋降順の S)/2 を求める。

・解法

$S_{昇順}=\ 1+\ 2+\ 3+\cdots+99+100$

$S_{降順}=100+99+98+\cdots+\ 2+\ 1$

$S=(S_{昇順}+S_{降順})/2=(100\times101)/2=100\times(100+1)/2$

$=5000+50=5050$

余談 問題を解きながら、$1+2+3+\cdots+n=n\times(n+1)/2$ が数学的帰納法により証明できることを黒板で見た記憶が蘇りました。

・証明の考え方（筆者の脳内に蘇った黒板のイメージ）

$n=1$ のとき 左辺＝1 右辺＝1×(1+1)/2＝1 ⇒左辺＝右辺が成立

$n=k$ のとき $1+2+3+\cdots+k=k\times(k+1)/2$ が成立すると仮定

$n=k+1$ のとき 左辺＝$1+2+3+\cdots+k+k+1=k\times(k+1)/2+k+1$

$=(k+1)(k+1+1)/2$ ⇒$n=k+1$ のとき与式が成立

$\therefore \forall n \in {}^{自然数}\mathbb{N}$ について $1+2+3+\cdots+n=n\times(n+1)/2$ が成立

A―③ $\frac{1}{12}+\frac{3}{28}+\frac{5}{84}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\boxed{?}$ 1/12+3/28+5/84+1/2+1/8+1/16

⇒【方針】キセル算になるように変形（部分分数分解）を試みる。

・解法

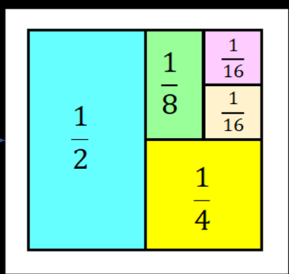
$左辺=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

$=\frac{4}{12}-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}$

$=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

（筆者の脳内イメージ）



参考 キセル算の由来

計算過程で分解の結果、式の中間の分数が空洞化することから、煙管(キセル)*の空洞に由来するとみられますが想像の域を出ません。

ちなみに、インターネットで公開されているキセルの画像を検索したところ豊國 画『東錦繪』にヒットしました。(⇒)

【画像】国立国会図書館デジタルコレクション

---

* 煙管(キセル)は、喫煙具の一種であり，先端にたばこ葉を詰める火皿がついた「雁首」、たばこの煙を通す「羅宇」、煙を吸う「吸い口」から構成されています。

【参考資料】JT ウェブサイト https://www.jti.co.jp/index.html (総合トップ>たばこ>たばこの基礎知識>たばこの種類>キセル)