奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

統計を理解するための学び直し（その８）　乗法

【乗法とは】

　乗法（乗算、かけ算）の定義について、国立国会図書館デジタルコレクションで公開されている戦前の文献を探したところ、以前お世話になった薗村宗太郎 編「新撰普通算術 上巻」にヒットしました。同書は、統計図書館コラムNo.P08「統計を理解するための学び直し（その５）素因数分解」の作成に際し、閲覧したところ。これも何かの縁なので、同書における乗法の定義をここに紹介します。これまでの人生で、乗法そのものの定義についてちゃんと読んだことがなかったので･･･新鮮な感じがしました。

　本稿では、乗法についてのトピック(話題)をいくつか調べてみましたので、紹介します。

（乗法の定義）

　乗法とは同一数を累加する法なり　而して累加すべき数を被乗数と言い累加すべき回数を示す所の数を乗数と言い其累加せし和を積と言う　又被乗数と乗数を共に因数と言う

　同数を累加するは累加する丈同数を倍すと言う又同数即被乗数に累加の回数を示す所の数即乗数を乗ずと言う通俗にては掛けると言う

【出典】薗村宗太郎 編「新撰普通算術 上巻」(明治 34 年 [1901 年]) (国立国会図書館デジタルコレクション)

【乗法に関する設問】

　インターネットで公開されている乗法に関する設問のサムネイルを見て、筆者が有意にピックアップし、自分勝手にアレンジ、脚色して解いてみましたので、ちょっとだけ紹介します。

問１　11×11＋22×22＋33×33＋44×44－55×55 を解け

問１の解

$11\times11+22\times22+33\times33+44\times44-55\times55=11^2+22^2+33^2+44^2-55^2$

三平方の定理より $33^2+44^2=55^2$ [注]

$\Rightarrow 33^2+44^2-55^2=0$

与式$=11^2+22^2+\boxed{33^2+44^2-55^2}=11^2+22^2=11^2+(2\times11)^2=11^2+4\times11^2=5\times11^2=5\times121$

∴与式=605

[注] ※「33,44,55」は、原始ピタゴラス数（互いに素なピタゴラス数）「3 ,4, 5」の 11 倍

問２－１　99×1、99×2、99×3、99×4、99×5、99×6、99×7、99×8、99×9 を解け

問２－２　999×1、999×2、999×3、999×4、999×5、999×6、999×7、999×8、999×9 を解け

問２－１の解

⇒ 題意より、与式＝99×n　ここで、n＝1～9 の自然数

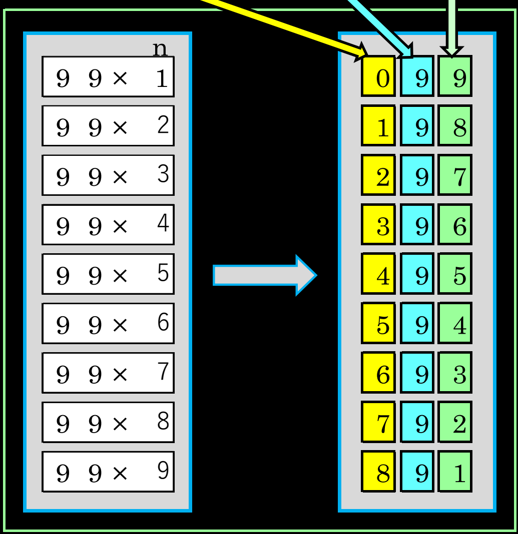
＝100n－n－100+100＝100n－100+100－n

＝ (n－1)×100+(100－n)

＝ (n－1)×100+(90+10－n)

＝ [(n－1)×100]+[9×10]+[10－n]

百の位に(n－1)を、十の位に一律に 9 を、一の位に(10－n)を置く。



問２－２の解

⇒ 題意より、与式＝999×n　ここで、n＝1～9 の自然数

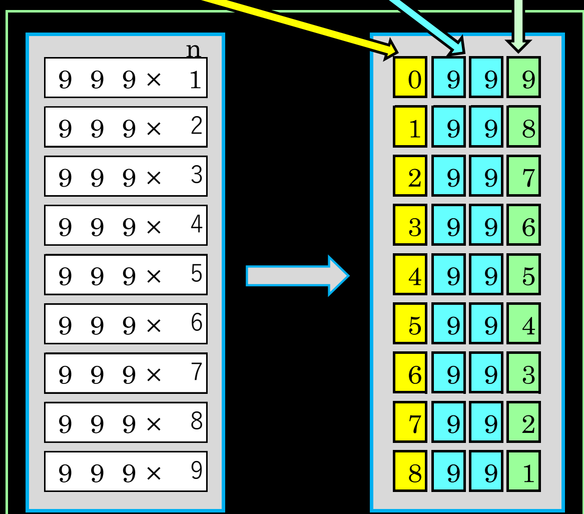
＝1,000n－n－1,000+1,000＝1,000n－1,000+1,000－n

＝ (n－1)×1,000+(1,000－n)

＝ (n－1)×1,000+(990+10－n)

＝ [(n－1)×1,000]+[99×10]+[10－n]。

千の位に(n－1)を、百と十の位に一律に 9 を、一の位に(10－n)を置く。



問３　6,789×6,789×6,789－6,788×6,789×6,790 を解け

問３の解

（その１）代数学的な解法

6,789＝n と置く。

与式＝$n^3-(n-1)\times n\times(n+1)=n^3-n\times(n^2-1)=n^3-n^3+n=n$

∴与式＝6,789

（その２）図形に着目した解法

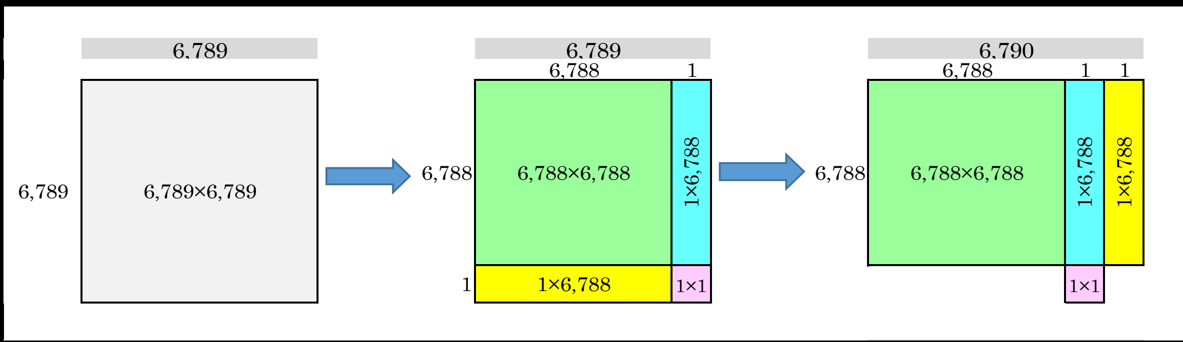
与式＝6,789×(6,789×6,789)－6,789×(6,788×6,790)＝6,789×(6,789×6,789－6,788×6,790)

ここで、6,789×6,789 と 6,788×6,790 について、面積をイメージして図と式で考える。

【6,789×6,789 について】

6,789×6,789 の正方形は、6,788×6,788 の正方形に 1×6,788 の長方形を２本と 1×1 の正方形を加えたものと同じ。
これを式と図で表すと次のようになる。

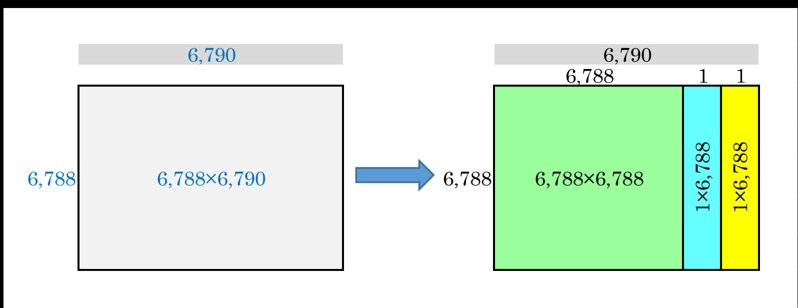
6,789×6,789＝6,788×6,788＋1×6,788＋1×6,788＋1×1･･･①



【6,788×6,790 について】

6,788×6,790 の長方形は、6,788×6,788 の正方形に 1×6,788 の長方形を２本加えたものと同じ。
これを式と図で表すと次のようになる。

6,788×6,790=6,788×6,788＋1×6,788＋1×6,788･･･②



①－②=1×1＝1

⇒与式＝6,789×①－6,789×②＝6,789×(①－②)＝6,789×1

∴与式＝6,789

問４　6×6、66×6、666×6、6,666×6、66,666×6、666,666×6 を解け

問４の解

6×6＝36
66×6＝360+36＝396
666×6＝3,600+360+36＝3996
6,666×6＝36,000+3,600+360+36＝39,996
66.666×6＝360,000+36,000+3,600+360+36＝399,996
666,666×6＝3,600,000+ 360,000+36,000+3,600+360+36＝3,999,996

6×6=	３６
66×6=	３９６
666×6=	３９９６
6,666×6=	３９９９６
66,666×6=	３９９９９６
666,666×6=	３９９９９９６

参考 上記の結果から、(n 桁の 6 のゾロ目)×6＝$3\times10^{n}+(10^{n-1}-1)\times10+6$ と予想し、数学的帰納法による証明にトライしてみました。

【証明の考え方】⇒ゾロ目なので n は 2 以上の自然数

左辺＝$[(6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10^2+6\times10)+6]\times6=6^2\times10^{n-1}+6^2\times10^{n-2}+\cdots+6^2\times10^2+6^2\times10+6^2$

(初期値)n＝2 のとき　左辺＝66×6＝360+36＝396　右辺＝$3\times10^2+(10^{2-1}-1)\times10+6=300+90+6=396$ ⇒左辺＝右辺が成立

n＝k のとき (k 桁の 6 のゾロ目)×6＝$3\times10^{k}+(10^{k-1}-1)\times10+6$ が成立すると仮定

n＝k+1 のとき (k+1 桁の 6 のゾロ目)×6＝$6^2\times10^{k}$ ＋ (k 桁の 6 のゾロ目)×6＝$6^2\times10^{k}+6^2\times10^{k-1}+6^2\times10^{k-2}+\cdots+6^2\times10^2+6^2\times10+6^2$

$=30\times10^{k}+6\times10^{k}+3\times10^{k}+(10^{k-1}-1)\times10+6=3\times10^{k+1}+9\times10^{k}+(10^{k-1}-1)\times10+6=3\times10^{k+1}+(10-1)\times10^{k}+(10^{k-1}-1)\times10+6$

$=3\times10^{k+1}+(10^{k+1}-10^{k})+(10^{k}-10)+6=3\times10^{k+1}+(10^{k+1}-10)+6=3\times10^{k+1}+(10^{k+1-1}-1)\times10+6$ ⇒n＝k＋1 のとき与式が成立

∴$\forall n_{\geq2}\in^{\text{自然数}}\mathrm{N}$ について(n 桁の 6 のゾロ目)×6＝$3\times10^{n}+(10^{n-1}-1)\times10+6$ が成立

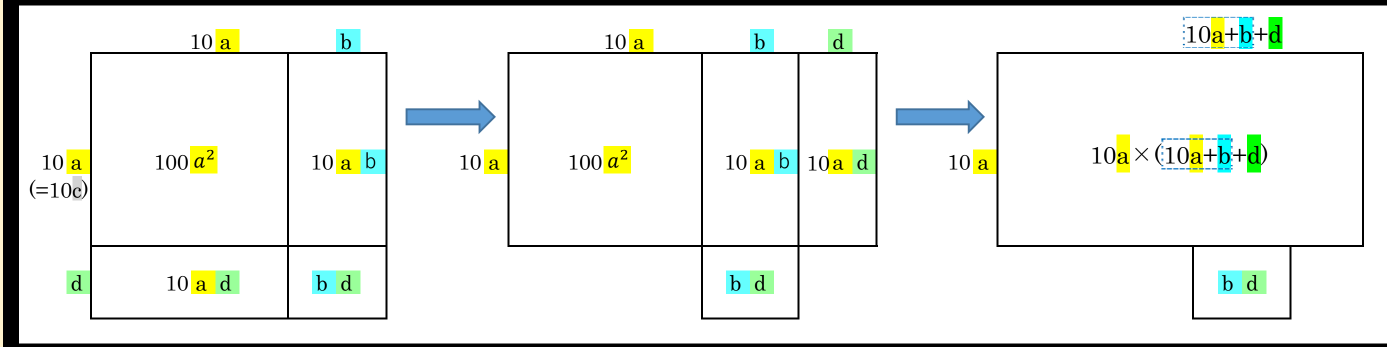
【インド式計算に関する設問】

乗法に関連して、インターネットで公開されている「インド式計算」に関する設問のサムネイルを見て、筆者が有意にピックアップし、自分勝手にアレンジ、脚色して解いてみましたので、ちょっとだけ紹介します。

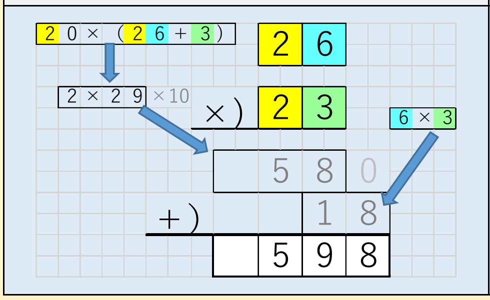
［二桁の自然数どうしの乗法の場合］

★１　十の位が同じ数の場合

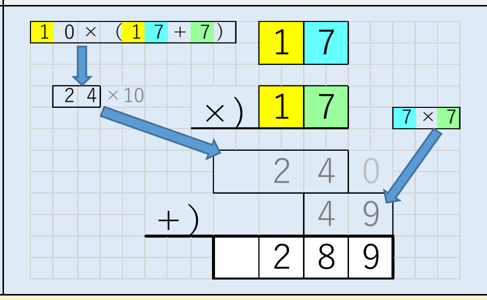
$a=c \Rightarrow ab \times cd = ab \times ad = (10a+b)\times(10a+d) = 100a^2 + 10a\times(b+d) + bd = 10a\times(10a+b+d) + bd$



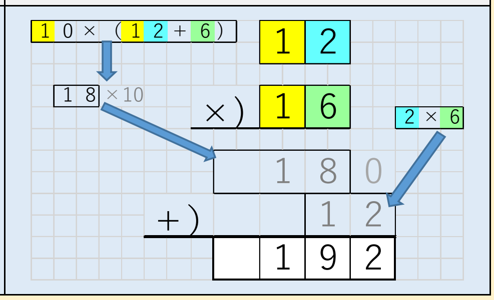
例１　２６×２３



例２　１７×１７



例３　１２×１６



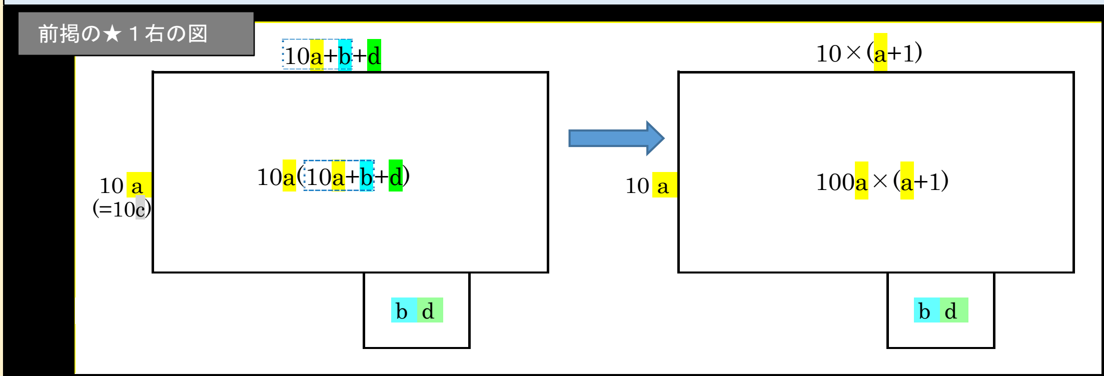
★２　十の位が同じ数で一の位の合計が 10 の場合

$a=c$、$b+d=10$

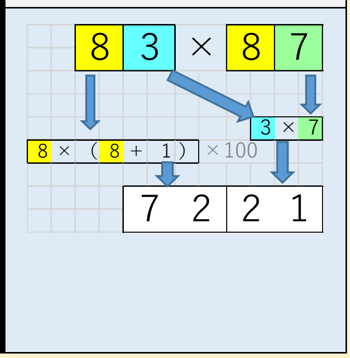
$\Rightarrow ab \times cd = ab \times ad = (10a+b)\times(10a+d) = 100a^2 + 10a\times(b+d) + bd$

$= 100a^2 + 10a\times 10 + bd = 100a\times(a+1) + bd$

前掲の★１右の図

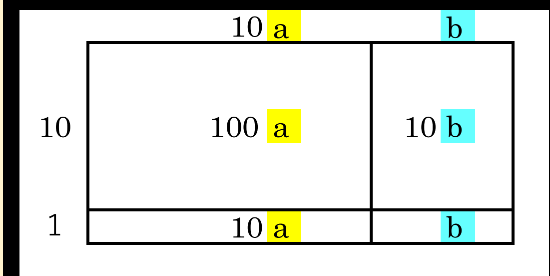


例　８３×８７

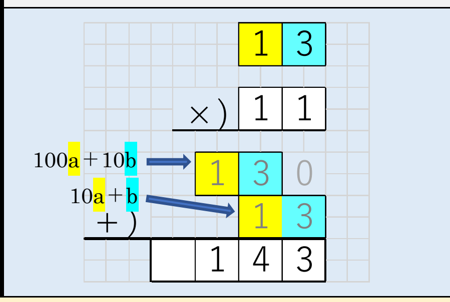


★３　二桁の数×11 の場合

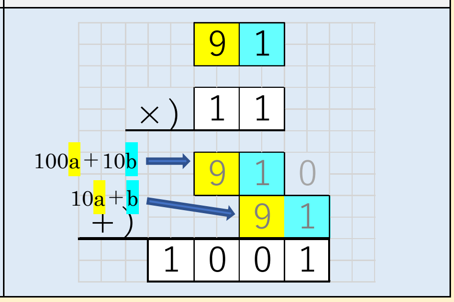
$ab \times 11 = (10a+b)\times 11 = (10a+b)\times(10+1) = 100a + 10a + 10b + b = (100a+10b) + (10a+b)$



例　１３×１１

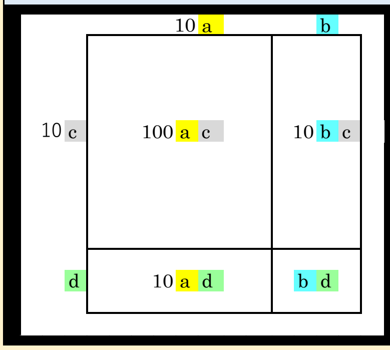


例　９１×１１

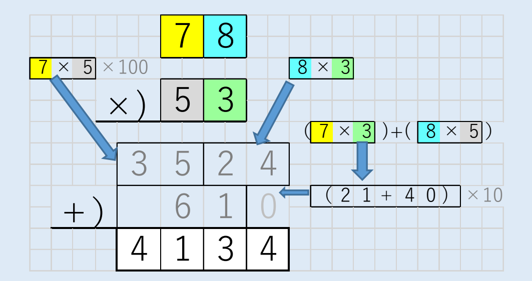


★４　二桁の数どうしの乗法の場合（上記の方法を忘れた場合＆上記以外の場合など）

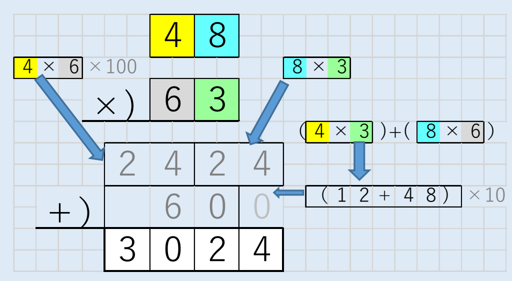
$\overline{ab}\times\overline{cd}=(10a+b)(10c+d)=100ac+10(ad+bc)+bd$



例１　78×53



例２　48×63



★５　100 に近い数字どうしの乗法の場合の場合

$\overline{ab}\times\overline{cd}=(10a+b)(10c+d)$

$100-(10a+b)=m$、$100-(10c+d)=n$ と置く。⇒100 との差に着目

$\Rightarrow \overline{ab}\times\overline{cd}=(10a+b)(10c+d)=(100-m)(100-n)$

$=100^2-100\times(m+n)+mn=100\times(100-(m+n))+mn$

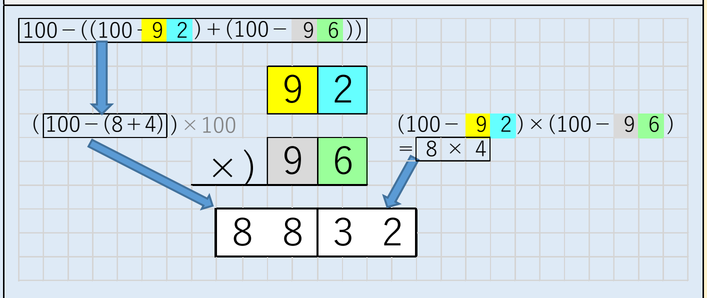
※ $(10a+b)=A$、$(10c+d)=B$ と置く方法も。⇒100 との差に着目した式に変形

$(10a+b)(10c+d)=AB=[100A+100B-100^2]+[100^2-100A-100B+AB]$

$=[A-(100-B)]\times100+[(100-A)(100-B)]$

$=[100-((100-A)+(100-B))]\times100+[(100-A)(100-B)]$

例　92×96



[m 桁の自然数]×「n 桁の９のゾロ目の」の場合]

[m 桁の自然数]×「n 桁の９のゾロ目」

（前提条件）$m\leqq n$、かつ、ゾロ目なので n は2以上の自然数

$\Rightarrow$[m 桁の自然数]$\times[(10^{n-1}\times9+\cdots+10^1\times9)+9]$

ここで、[m 桁の自然数]＝Aと置く。

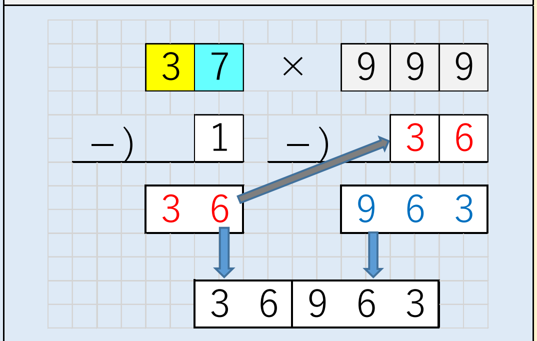
また、$[(10^{n-1}\times9+\cdots+10^1\times9)+9]=10^n-1$

$\Rightarrow$与式$=A\times(10^n-1)=10^nA-A$

$=10^nA-10^n+10^n-A=[(A-1)\times10^n]+[10^n-A]$

$=[(A-1)\times10^n]+[(10^n-1)-(A-1)]$

例　37×999



【雑感】

今回、乗法の工夫の入り口を理解することにより、数学が楽しいものであることを実感できました。今回の調べ物を通じて、ケアレスミスを未然に防止するために工夫する姿勢の大切さを改めて認識しました。そして、それは、効率的で正確な統計作成にも通用するように思いました。

【あとがき】

今回、乗法に係るインド式計算について調べましたが、そもそも、いわゆる「インド式計算」の定義が判然としない面があり、調べれば調べるほど謎が深まりました。例えば、いわゆる「おみやげ算」との関係さえも分かりませんでした。インドにおける小学生の教科書の閲覧を今後の人生の目標の一つにしたいと思います。いずれにしても、乗法も統計に縁のある確率と同様、面積でイメージすると理解しやすい場合もあることを体験することができました。

【参考資料】

加藤芳信「インドの教育制度，インド式計算法および小学校低学年算数教科書」
木谷 紀子、星 千枝、黒木 研史、谷内 正裕、鈴木 久、武沢 護「インド数学を取り入れた数量感覚教材の実践と考察」
千賀博巳「計算の工夫（脳トレーニング）」
水野純『インド式かんたん計算法』
永野裕之『とてつもない数学』

余談

Excel の絶対参照機能を活用して、九九ならぬ十九十九（とくとく）の表を作成してみました。十台どうしのかけ算の結果から元の十台の因数を逆算することも老後の楽しみになりそうです。