奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

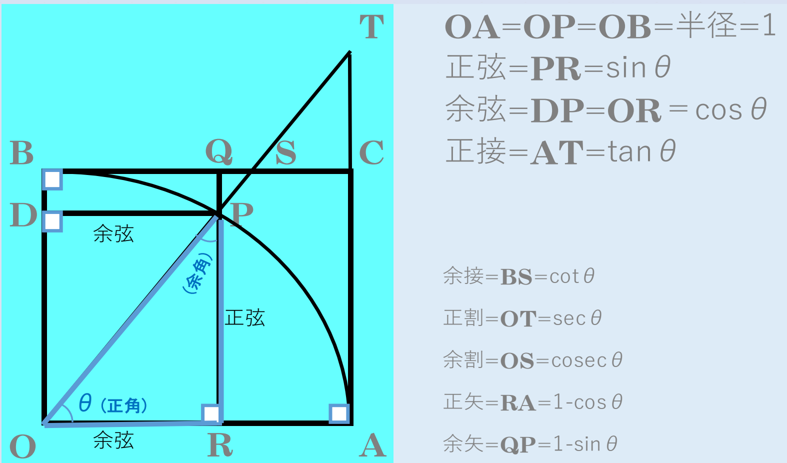
統計を理解するための学び直し（その６） 正弦・余弦でいう弦

【はじめに】
　統計を理解するための学び直しのため、直角三角形の辺の呼称である鉤股弦(勾股弦)（こうこげん）や正弦・余弦でいう弦について、調べてみましたので、その結果を紹介します。
　インターネットで探索したところ、たまたま司馬江漢「和蘭天説」(寛政 8 年（1796 年)刊行)に出会い、同書に八線之図がありそのなかで「正弦」などの用語が登場していることを知りました。同書で八線の説明があり、八線には、正弦線、正切線、正割線、正矢線、余弦線、余切線、余割線、余矢線があるとされていました（【別記１】)。

【八線】
　八線については、**国立国会図書館 HP「江戸の数学」**における三角関数に詳しく説明されていました。その要点は、次のとおりです。

●国立国会図書館 HP「江戸の数学」における三角関数についての説明（要点）
・三角関数は直角三角形に対して考えられる 6 種類 [1]の比の間の関係を扱う三角法がその起源で、角度に比の値を対応させる関数からなる。
・三角関数表は決められた角度における正弦(sin)や余弦(cos)、正接(tan)の値を表にしたもの。古代ギリシアのプトレマイオス(c.85-c.165)は『アルマゲスト』の中で正弦の表を作成。正確には斜辺(半径)の長さが 60 の直角三角形(円)のある角度の 2 倍(中心角)に対する対辺の長さの 2 倍(弦)の表で、弦の表(chord table)と呼ばれる。
・我が国での最初の三角関数表は建部賢弘(1664-1739)の『算暦雑考』であるといわれている
・我が国で実際に使われた三角関数表はヨーロッパの三角関数表を漢訳したもので、割円八線表と呼ばれた。

(参考)八線の図(前掲の「江戸の数学」を基に作成)



【正弦や余弦の本質ー正弦、余弦は比なのか線分なのか】
　正弦や余弦などの訳字の経緯について調べてみたのですが、判然としませんでした。現代では、正弦や余弦は三角比として直角三角形の辺の比とされていますが、前掲の「和蘭天説」では、正弦線、余弦線と表現されていることから線としての弦を指しているように解することもできそうですが、図自体に明示されていないものの単位円(半径が１の円)を前提に表現したものであれば、比であると解することもできます。これについても判然としませんでした。

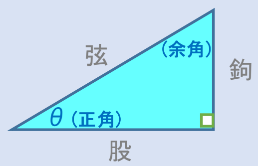
【鉤股弦の弦と円周上の線分としての弦】
　結局、弦は、①鉤股弦の法（ピタゴラスの定理)でいう直角三角形の直角の向かいの辺(斜辺)をいう場合と②円に内接する直角三角形や三角形の各辺のように円周上に両端点を持つ線分をいう場合が考えられ、それぞれのケースごとに正弦の正と弦の関係、余弦の余と弦の関係について整理してみました。
　ちなみに、Newton ライト 2.0「三角関数」によれば、正弦定理を「サイン(正弦)が主役の定理」とし、余弦定理を「コサイン(余弦)が主役の定理」としています。確かに、そうなのでしょうが、・・・モヤモヤ感を覚えスッキリしません。このこともあり、正弦や余弦の本質のほか、鉤股弦(勾股弦)の弦と正弦・余弦の弦との関係を知りたくなりました。

---

[1]「6 種類」とは、正弦、正接、正割、余弦、余接、余割をいい、古い文献では正接を正切、余接を余切と表記されているものがあります。

ケース１

　正角(θ)、余角(90°-θ)の直角三角形において、正角の向かいの辺を鉤、余角の向かいの辺を股、直角の向かいの辺を弦と呼ぶ場合。

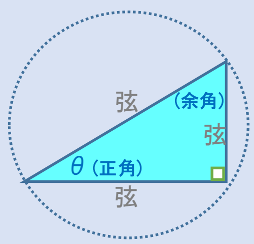


（参考）鉤股弦（勾股弦）（こうこげん）
●「江戸の数学」（国立国会図書館ＨＰ）
　（ピタゴラスの定理は）中国の数学では鉤股弦（こうこげん）の法と呼ばれ、古代の数学書『周髀算経』や『九章算術』で取り上げられています。日本に入ってからも鉤股弦という名称はそのまま使われました。鉤は「かぎの手」で直角を挟む短辺を、股は「足の分かれめ」で長辺を、弦は「弓のつる」で斜辺を意味しています。古代バビロニアや古代インドでもこの定理は発見されており、測量や建築、天文観測などで使われる重要な定理でした。三角関数もピタゴラスの定理と密接に関係しています。

●正弦(sin)の定義：弦(直角の向かいの辺)の長さに対する鉤(正角の向かいの辺)の長さの比
⇒弦の長さと正角が分かれば、鉤(正角の向かいの辺)の長さが分かる
●余弦(cos) の定義：弦(直角の向かいの辺)の長さに対する股(余角の向かい辺)の長さの比
⇒弦の長さと正角が分かれば、股(余角の向かいの辺)の長さが分かる

ケース２

　正角(θ)、余角(90°-θ)の直角三角形において、各辺を弦と呼ぶ場合。各辺は、正角の向かいの弦、余角の向かいの弦、直角の向かいの弦で構成。



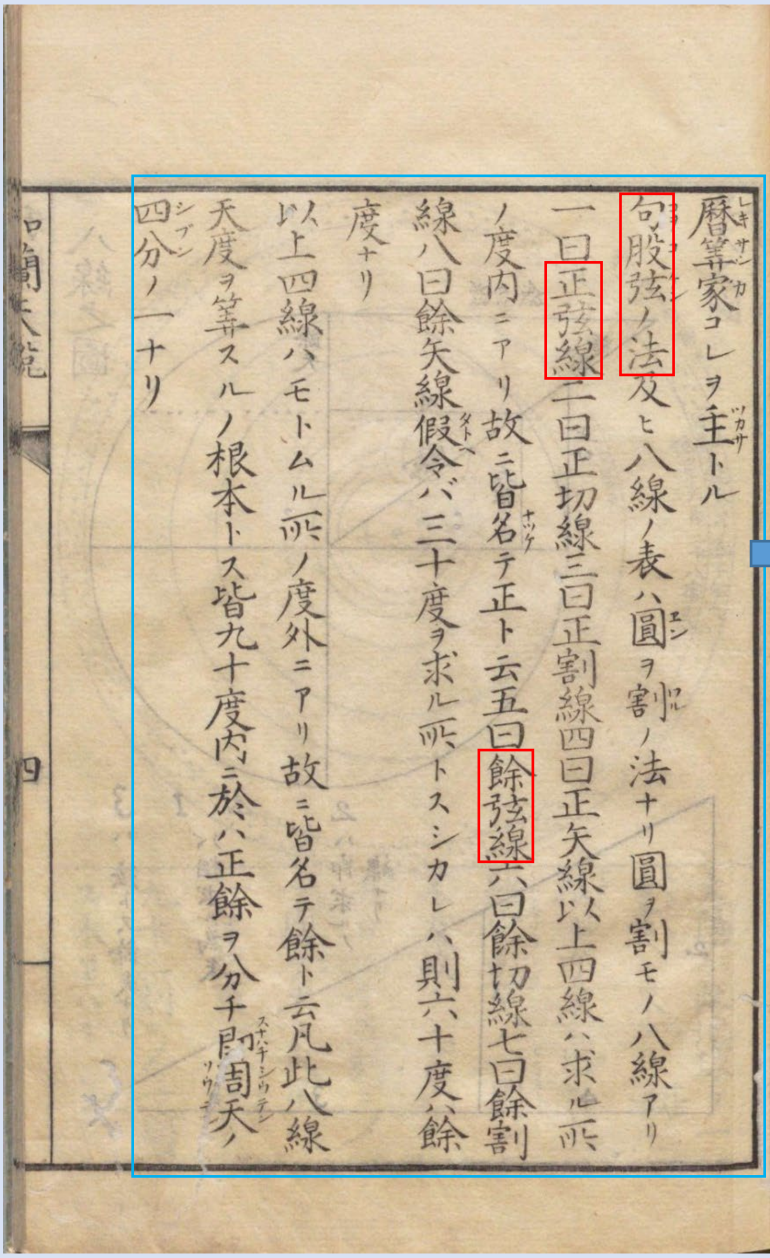
●正弦(sin)の定義：直角の向かい弦の長さに対する正角の向かいの弦の長さの比
⇒直角の向かいの弦の長さと正角が分かれば、正角の向かいの弦の長さが分かる
●余弦(cos)の定義：直角の向かいの弦の長さに対する余角の向かいの弦の長さの比
⇒直角の向かいの弦の長さと正角が分かれば、余角の向かいの弦の長さが分かる

【ケース１とケース２の定義の評価】
　ケース１でもケース２でも正弦や余弦の定義は可能だと思います。ただ、ケース１の直角三角形の各辺の呼称としての鉤股弦（勾股弦）の用例は、国立国会図書館デジタルコレクションで探索した範囲では明治時代から戦前の教育書まで遡らないと登場しないほど、マイナーな印象です。
　ちなみに、現代の数学では、弦は、円上に両端点を持つ線分や正弦や余弦、正弦定理や余弦定理で登場します（学習指導要領における弦の用例は、統計図書館コラム・ピックアップコラム【No.P04】で紹介したところ。)。
　結局、ケース１のように直角三角形の辺を鉤股弦（勾股弦）と呼ぶか、ケース２のように直角三角形の辺をすべて弦と呼ぶかは、定義の問題ということになります。筆者のように、最近になって脳内で直角三角形の辺を鉤股弦（勾股弦）と呼ぶことがインプットされている場合は、正弦、余弦、正弦定理、余弦定理の弦の意味が、にわかにイメージできないことがわかりました。また、筆者は、半世紀近くの間、直角三角形や三角形における弦の意味を理解せずに、sin を日本語で正弦といい、cos を日本語で余弦ということだけを記憶してしまったことも少なからず影響していると思います。このことをちょっとだけ反省しています。

【雑感】
　今回、鉤股弦(勾股弦)の弦と正弦・余弦の弦との関係に関する資料は、調べた限りでは、見当たりませんでした。このこともあり、正弦・余弦や正弦定理・余弦定理でいう弦と鉤股弦（勾股弦）の法でいう弦は、筆者を混乱させたものの、三角関数への寄り道（不要不急？）をすることができました。新型コロナウイルス感染症（ＣＯＶＩＤ-19）の緊急事態宣言は、筆者に不要不急の意味について考える機会も付与することになりました。また、今回の調ものの過程で、正弦定理と余弦定理の証明の考え方（【別記 2】、【別記 3】参照。証明の考え方は鋭角三角形の場合に限定[2]）を理解することができました。ここでも学び直しの楽しさを実感しました。また、今回の学び直しで、定義は、誤った解釈を回避するために重要であり、法令(特に権利義務に係る法令)における定義規定の重要性や統計の品質表示の重要性を改めて認識しました。

[2] 本稿は、弦に着目することが主目的なので、【別記 2】正弦定理、【別記 3】余弦定理では、鋭角三角形（すべての角＜90°）の場合の証明の考え方のみを紹介し、直角三角形の場合と鈍角三角形（最大角＞90°）の場合の証明の考え方の紹介は割愛しました。

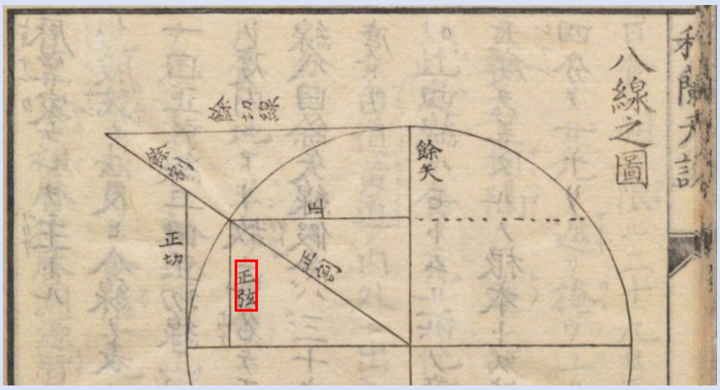
【別記１】司馬江漢「和蘭天説」(寛政８年（1796 年)刊行）　画像：国立公文書館デジタルアーカイブ



暦筭家コレヲ主トル
句股弦ノ法及ヒ八線ノ表ハ圓ヲ割ノ法ナリ圓ヲ割モノ八線アリ
一曰正弦線二曰正切線三曰正割線四曰正矢線以上四線ハ求ル所
ノ度内ニアリ故ニ皆名テ正ト云五曰餘弦線六曰餘切線七曰餘割
線八曰餘矢線假令バ三十度ヲ求ル所トスシカレハ則六十度ハ餘
度ナリ
以上四線ハモトムル所ノ度外ニアリ故ニ皆名テ餘ト云凡此八線
天度ヲ筭スルノ根本トス皆九十度内ニ於ハ正餘ヲ分チ即周天ノ
四分ノ一ナリ

（現代文への書下ろし）
勾股弦の法及び八線の表は円を割るの法なり。円の割るもの八線あり、一曰く正弦線、二曰く正切線、三曰く正割線、四曰く正矢線、以上四線は求める所の度内にあり。故に、皆名付けて正と云う。五曰く余弦線、六曰く余切線、七曰く余割線、八曰く余矢線。例えば三十度を求むる所とす。しかれば則ち六十度は余度なり。

以上四線は、求むる所の度外にあり。故に皆名付けて余と云う。凡そこの八線天度を等するの根本とす。皆九十度内に於いては正余を分かち即ち周天の四分の一なり。



一口メモ
　コペルニクスの地動説を紹介した本書において、**勾股弦（鉤股弦）の法**と**正弦線**、**余弦線**が同時に登場しており、弦はどこを指すのか、筆者を悩ませることとなりました。一方で、江戸時代の絵師で蘭学者の司馬江漢(1747- 1818)のスケールの大きさを感じました。

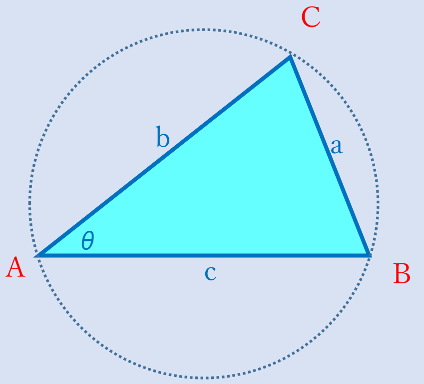
【別記２】正弦定理(law of sines)

△ABC において、BC = a, CA = b, AB = c, 外接円の半径を R とすると、 三角形の角の一つを角 θ とした場合、θ と θ の向かいの辺の長さとの関係は次の式のとおり。(θ は、A、B 又は C)

正弦定理は、三角形の対辺と sin（正弦）の比は、どの角も同じとするもの。

●正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

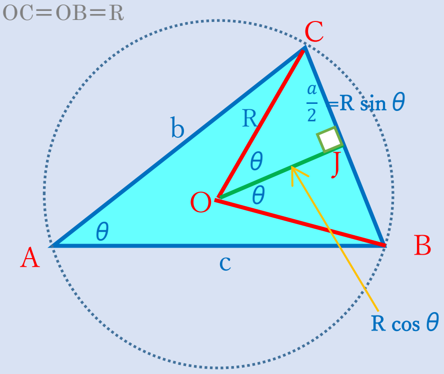


【※】 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ の証明の考え方の一例

（鋭角三角形の場合）

円の中心 O から辺 BC に垂線を引きます。円周角の定理より∠BOC＝２∠ABC＝∠JOC＝θ

半径= OC＝OB＝R



(解法１)R sin θ =a/2⇒$2R=\frac{a}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin A}$

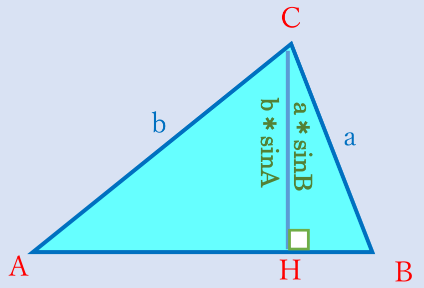
(解法２)$R^2=(a/2)^2+R^2\cos^2\theta$

⇒R^2（$1-\cos^2\theta$）$=(a/2)^2$ ⇒ R^2（$\sin^2\theta$）$=(a/2)^2$

⇒R*sin θ =a/2 ⇒$2R=\frac{a}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin A}$

●正弦定理の証明の考え方の一例（鋭角三角形の場合）

【step1】 C から辺 AB に垂線を引きます。

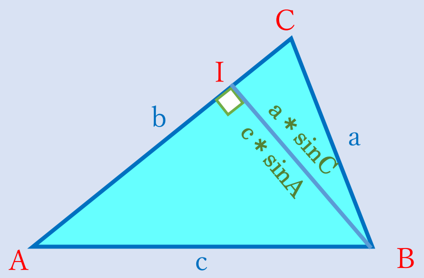


△ＡＣＨでＣＨ＝ｂsinＡ、△ＣＢＨでＣＨ＝ａsinＢ

これより　 ｂsinＡ＝ａsinＢ

よって、$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

【step2】Ｂから辺ＡＣに垂線を引きます。



△ＢＡＩでＢＩ＝ｃsinＡ、△ＢＣＩでＢＡＩ＝a sinＣ

これより　 ｃsinＡ＝a sinＣ

よって、$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

したがって、$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

＝2R⇒外接円の直径（半径の２倍）に等しい。

⇒証明の考え方【※】

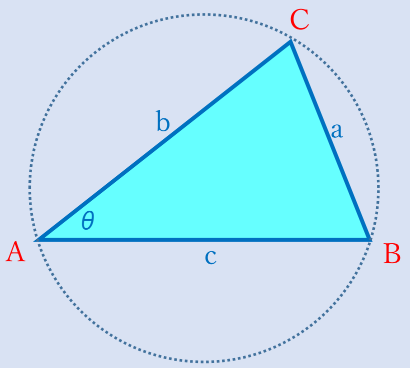
【別記３】余弦定理(law of cosines)

△ABC において、BC＝a, CA＝b, AB＝c とすると、三角形の 1 つの角を θ とした場合、θ と θ をはさむ二辺の長さと、角 θ の向かいの辺の長さの関係は次の式のとおり。(θ は、A、B 又は C)

余弦定理は、二辺の長さと二辺を挟む角度（内角）がわかれば、残余の辺の長さが分かるとするもの。

●余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc*\cos A$

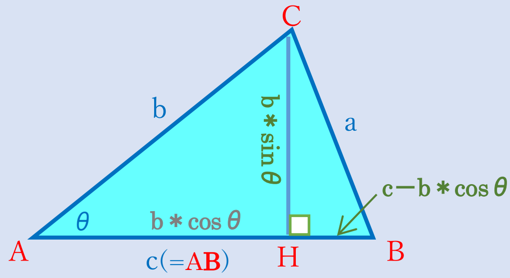


同様に、$b^2=a^2+c^2-2ac*\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab*\cos C$

●余弦定理の証明の考え方の一例（鋭角三角形の場合）

C から辺 AB に垂線を引きます。



$a^2=CH^2+HB^2=CH^2+(AB-AH)^2$

$=(b*\sin\theta)^2+(c-b*\cos\theta)^2$

$=b^2*(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+c^2-2bc*\cos\theta$

$=b^2+c^2-2bc*\cos\theta$