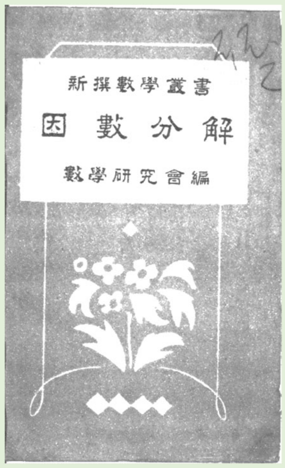
奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

（統計を理解するための学び直し（その５）素因数分解 付録）

因数分解の暗黙の掟？

数学研究会 編『因数分解』（表紙）



【画像】国立国会図書館デジタルコレクション

【因数分解とは】

素因数分解は、自然数を素因数だけの積の形で表すことを目的としていますが、因数分解は、ある数（又は多項式）を約数（因数）の積に分解することを目的としています。

「因数分解」をキーワードとして国立国会図書館デジタルコレクションでログインなしで閲覧可能（インターネット公開）な図書を適合度順に検索したところ、数学研究会 編『因数分解』が一番目にヒットしました。

ところで、筆者が底辺の高校の生徒だった頃、ボーッと数学の授業を受けていたので「どこまで因数分解すればいいのか」について、何も疑問に持たず、特にことわりがない場合、係数が整数の状態でフィニッシュを迎えてよいのだと思い込んでいました（初歩的問題の正解からの思い込みかもしれません）。

こうした根拠のない筆者の思い込みを少しでも補正すべく多項式の因数分解の学び直しをしてみました。本稿では、多項式の因数分解に関するトピック（話題）について紹介します。

【どこまで因数分解すればいいのか】

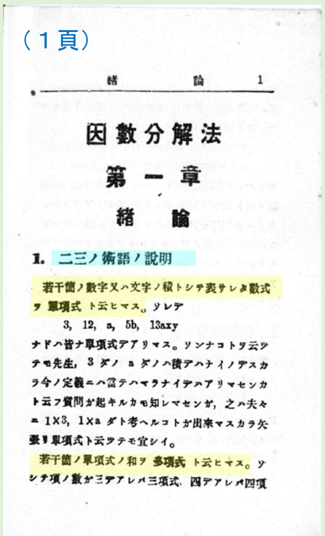
「どこまで因数分解すればいいのか」については、前掲の数学研究会 編『因数分解』において第１章に「ドコマデ分解スルカ」という項目があり、これによれば「普通ノ因数分解ノ問題ナラバ特別ノ理由ガナイ限リハ無理数トカ虚数トカ云フ ウルサイ奴ガ顔ヲ出サナイ範囲内ニオイテ分解ヲ行ヘバヨイノデス。」とありました。表現が印象的で、筆者の低性能な脳内のＣＰＵに常駐しそうです。

一口メモ　ここまでで、自然数、整数、無理数、虚数の用語が登場しましたので、本稿で用いる数の分類について整理しておきます。

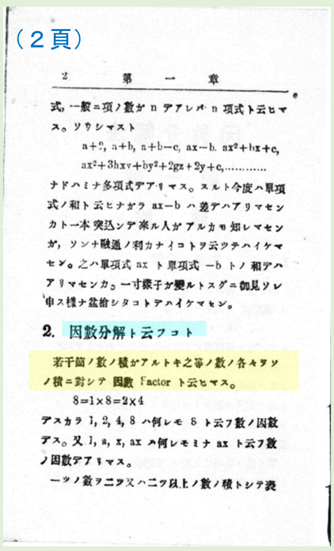
複素数（例：a＋bi）　a：実数部、b：虚数部（b：実数、i：虚数単位）$i^2=-1 \Leftrightarrow i=\sqrt{-1}$	実数（実数部≠0又は実数部＝0で虚数部＝0のもの）	有理数（分数表示可能）	整数	自然数＝正の整数
				ゼロ
				負の整数
			整数以外	有限小数
				循環小数（例：1/3、1/7）
		無理数（分数表示不可能）	超越数（代数方程式の解にもならないもの。例：円周率π、自然対数の底e）	
			超越数以外（代数方程式の解になるもの。例：$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$）	
⇒実数bは虚数単位iの係数	虚数	純虚数（複素数のうち、実数部＝0で、虚数部≠0のもの。例：a＋biでa＝0、b≠0の場合）		
		純虚数以外（複素数のうち、実数部≠0で、虚数部≠0のもの。例：a＋biでa≠0、b≠0の場合）		

■数学研究会 編『因数分解』（大正11年[1922年]）（抜粋）

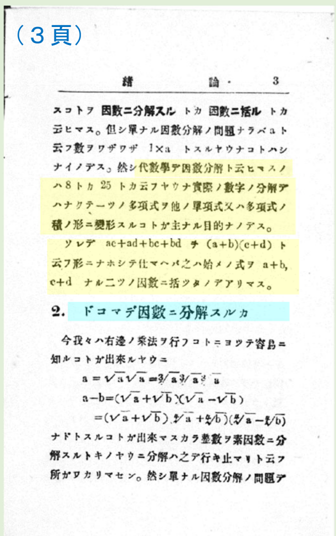
（１頁）



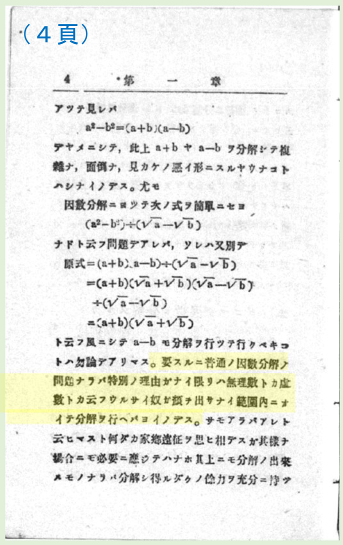
（２頁）



（３頁）



（４頁）



（マーカー部分）

二三ノ術語ノ説明
若干箇ノ数字又ハ文字ノ積トシテ表サレタ数式ヲ單項式ト云ヒマス。
・・・
若干箇ノ單項式ノ和ヲ多項式ト云ヒマス。・・・

因数分解ト云フコト
若干箇ノ積ガアルトキ之等ノ数ノ各々ラソノ積ニ對シテ因数Factorト云ヒマス。
・・・

・・・代数學デ因数分解ト云ヒマスノハ・・・一ツノ多項式ヲ他ノ單項式又ハ多項式ノ積ノ形ニ變形スルコトガ主ナル目的ナノデス。
ソレデ ac+ad+bc+bd ヲ (a+b)(c+d) ト云フ形ニナホシテ仕マヘバ之ハ始メノ式ヲ a+b、c+d ナルニツノ因数ニ括ツタノデアリマス。

（マーカー部分）

ドコマデ因数分解スルカ
・・・
要スルニ普通ノ因数分解ノ問題ナラバ特別ノ理由ガナイ限リハ無理数トカ虚数トカ云フウルサイ奴ガ顔ヲ出サナイ範囲内ニオイテ分解ヲ行ヘバヨイノデス。・・・

【画像】https://dl.ndl.go.jp/pid/916899（国立国会図書館デジタルコレクション）

【因数分解に関する設問】
インターネットで公開されている因数分解に関する設問のサムネイルを見て、筆者が有意にピックアップし、自分勝手にアレンジ、脚色して解いてみましたので、ちょっとだけ紹介します。
おそらく、もっと論理的なアプローチによる解法があるのでしょうが、己の勘と閃きに依存して気合いで解きました。

A—① x^4+x^2+1 の因数分解　x^4+x^2+1

⇒【方針】「二乗」－「二乗」（⇒和と差の積）になるように変形を試みる。

・解法　$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

A—② $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ の因数分解　x^5+x^4+x^3+x^2+x+1

（与式＝P(x)と置くと、因数定理より、P(－1)＝0 ⇒ $(x+1)$を因数に持つ）
⇒【方針】 $(x+1)$を因数に持つように変形を試みる。

・解法１
$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=x^4(x+1)+x^2(x+1)+x+1=(x+1)(x^4+x^2+1)$

前掲のＡ—①より、 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
したがって、 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^4+x^2+1)=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

・解法２
$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=x^3(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
$=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

・解法３
与式に$(x-1)$をかけると、$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

したがって、$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$と変形でき、
このうち、両辺の共通項$(x-1)$を外すと $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

【参考】
※$(x+1)^3=(x+1)(x^2+2x+1)=(x^3+2x^2+x)+(x^2+2x+1)=x^3+3x^2+3x+1$
$x^3+1=(x+1)^3-3x^2-3x=(x+1)^3-3x(x+1)=(x+1)((x+1)^2-3x)=(x+1)(x^2+2x+1-3x)=(x+1)(x^2-x+1)$
あるいは $x^3+1=\underline{x^3-x^2+x}\ \underline{+x^2-x+1}=x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x+1)$

※$(x-1)^3=(x-1)(x^2-2x+1)=(x^3-2x^2+x)-(x^2-2x+1)=x^3-3x^2+3x-1$
$x^3-1=(x-1)^3+3x^2-3x=(x-1)^3+3x(x-1)=(x-1)((x-1)^2+3x)=(x-1)(x^2-2x+1+3x)=(x-1)(x^2+x+1)$
あるいは $x^3-1=\underline{x^3+x^2+x}\ \underline{-x^2-x-1}=x(x^2+x+1)-(x^2+x+1)=(x-1)(x^2+x+1)$

A—③ x^3-2x^2+1 の因数分解　x^3-2*x^2+1

（与式＝P(x)と置くと、因数定理より、P(1)＝0 ⇒ $(x-1)$を因数に持つ）
⇒【方針】 $(x-1)$を因数に持つように変形を試みる。

・解法　$x^3-2x^2+1=\underline{x^3-x^2}\ \underline{-x^2+1}=\underline{x^2(x-1)}\ \underline{-(x^2-1)}=x^2(x-1)-(x+1)(x-1)=(x-1)(x^2-x-1)$

A—④ x^5-1 の因数分解　x^5-1

（与式＝P(x)と置くと、因数定理より、P(1)＝0 ⇒ $(x-1)$を因数に持つ）
⇒【方針】 $(x-1)$を因数に持つように変形を試みる。

・解法　$x^5-1=x^5+x^4+x^3+x^2+x\ -x^4-x^3-x^2-x-1=x(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

A—⑤ x^5-x^4-1 の因数分解　x^5-x^4-1

⇒【方針】x^3を足し引きして変形を試みる。

・解法　与式$=x^5-x^4+x^3\ -x^3-1=x^3(x^2-x+1)-(x^3+1)=x^3(x^2-x+1)-(x+1)(x^2-x+1)=(x^2-x+1)(x^3-x-1)$

A—⑥ x^4-4x^2+x+2 の因数分解　x^4-4*x^2+x+2

（与式＝P(x)と置くと、因数定理より、P(-2)＝0、 P(1)＝0⇒ $(x+2)$と$(x-1)$を因数に持つ）
⇒【方針】与式を$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$で割ってみる。

・解法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2\ -x-1 \\
x^2+x-2 & \ x^4 \qquad -4x^2+\ x+2 \\
-) & \ x^4+x^3-2x^2 \\
 & \qquad -x^3-2x^2+\ x \\
-) & \qquad -x^3-\ x^2+2x \\
 & \qquad\quad -\ x^2-\ x+2 \\
-) & \qquad\quad -\ x^2-\ x+2 \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

したがって、$x^4-4x^2+x+2=(x^2+x-2)(x^2-x-1)=(x+2)(x-1)(x^2-x-1)$

A―⑦ $x^6-14x^4+17x^2-4$ の因数分解　x^6-14*x^4+17*x^2-4

（与式$=P(x)$と置くと、因数定理より、$P(-1)=0$、 $P(1)=0$⇒ $(x+1)$と$(x-1)$を因数に持つ）
⇒【方針】与式を$(x+1)(x-1)=x^2-1$で割ってみる。
・解法

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^4 & -13x^2 & & +4 \\
x^2-1\ ) & x^6 & -14x^4 & +17x^2 & -4 \\
-) & x^6 & -x^4 & & \\
 & & -13x^4 & +17x^2 & \\
 & -) & -13x^4 & +13x^2 & \\
 & & & 4x^2 & -4 \\
 & & & -)\ 4x^2 & -4 \\
 & & & & 0
\end{array}
$$

⇒【方針】与式をx^2-1で割った商x^4-13x^2+4を「二乗」－「二乗」（⇒和と差の積）になるように変形を試みる。
$x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-13x^2+4x^2=(x^2-2)^2-9x^2=((x^2-2)+3x)((x^2-2)-3x)=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

したがって、$x^6-14x^4+17x^2-4=(x^2-1)(x^4-13x^2+4)=(x+1)(x-1)(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

A―⑧ x^7+x^2+1 の因数分解　x^7+x^2+1

⇒【方針】1,280,000,401、3,200,021 の素因数分解(⇒統計図書館コラム【No.P08】)を想起し、
(x^2+x+1)を因数に持つように変形を試みる。
・解法　与式$=x^7+x^3+x^2-x^3-x^2-x+x^2+x+1$
$=x^2(x^5+x+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$　⇒下線部は 別記 参照
$=x^2(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2(x^3-x^2+1)-x+1)=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$

別記 $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1$
$=x^2(x^3-1)+x^2+x+1$
$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1$
$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

A―⑨ $x^{14}+x^7+1$ の因数分解　x^14+x^7+1

⇒【方針】(x^2+x+1)を因数に持つように変形を試みる。
・解法

与式$=x^{14}+x^{13}+x^{12}\quad -x^{13}-x^{12}-x^{11}$
$+x^{11}+x^{10}+x^9\quad -x^{10}-x^9-x^8$
$+x^8+x^7+x^6\quad -x^6-x^5-x^4$
$+x^5+x^4+x^3\quad -x^3-x^2-x$
$+x^2+x+1$

$=(x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

参考 (x^2+x+1)を因数に持つと予想した筆者の脳内イメージ（お花畑モード）

$x^{14}+x^7+1=0$ と置き、両辺に(x^7-1)をかける。
⇒左辺$=(x^7-1)(x^{14}+x^7+1)=x^{21}-1$
x^n-1 の因数分解は、n が m の倍数のとき(x^m-1)を因数に持つ。
⇒$x^{21}-1$ は、(x^7-1)と(x^3-1)を因数に持つ。
n＝p(素数)のとき、$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)$
⇒$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
⇒$x^{21}-1$ は、(x^3-1)を因数に持つので(x^2+x+1)を因数に持つ。
⇒x^7-1 は、(x^2+x+1)を因数に持たない。
∴$x^{14}+x^7+1$ は、(x^2+x+1)を因数に持つ。

おまけ x^7-1 と $x^{14}+x^7+1$ を因数分解すると $\boxed{x^{21}-1}$の因数分解も生成！
$\boxed{x^{21}-1}=(x^7-1)(x^{14}+x^7+1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

・検証
⇒与式を x^2+x+1 で割ってみる。

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1 \\
x^2+x+1\ )\ x^{14}+x^7+1 \\
-)\ x^{14}+x^{13}+x^{12} \\
\qquad -x^{13}-x^{12} \\
\qquad -)\ -x^{13}-x^{12}-x^{11} \\
\qquad\qquad +x^{11} \\
\qquad\qquad -)\ x^{11}+x^{10}+x^9 \\
\qquad\qquad\qquad -x^{10}-x^9 \\
\qquad\qquad\qquad -)\ -x^{10}-x^9-x^8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^8+x^7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -)\ x^8+x^7+x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -)\ -x^6-x^5-x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^5+x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -)\ x^5+x^4+x^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -x^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -)\ -x^3-x^2-x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -)\ x^2+x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

∴ $x^{14}+x^7+1=(x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

A―⑩ $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$ の因数分解　x^4-4x^3+5x^2-4x+1

⇒【方針】パスカルの三角形を活用し、「二乗」－「二乗」（⇒和と差の積）になるように変形を試みる。
・解法　パスカルの三角形による、$(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$ を活用。

与式$=x^4-4x^3+6x^2-4x+1-x^2$
$=(x-1)^4-x^2=((x-1)^2)^2-x^2$
$=(x^2-2x+1)^2-x^2$
$=(x^2-2x+1+x)(x^2-2x+1-x)=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

筆者の脳内イメージ

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

A—⑪ x^4-9x^2-6x-1 の因数分解 x^4-9x^2-6x-1

⇒【方針】

（その１）「二乗」－「二乗」（⇒和と差の積）になるように変形を試みる。

（その２）四次式を因数分解すると次のいずれかになると考えられるので、それぞれのパタ−ンについてとり得る係数を導出する。

[1]一次式×三次式･･･$(x-p)(x^3+qx^2+rx+s)$

[2]二次式×二次式･･･$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$

・解法１

与式$=x^4-(9x^2+6x+1)=(x^2)^2-(3x+1)^2=(x^2+3x+1)(x^2-3x-1)$

・解法２

[1]一次式×三次式$(x-p)(x^3+qx^2+rx+s)$について

与式$=F(x)$と置く。p, s がとり得る値は、$(1,-1),(-1,1)$ なので、$F(1)$、$F(-1)$を求める。

$F(1)\neq 0$、$F(-1)\neq 0$ なので、$F(x)$ は、$(x-p)$を因数に持たない。⇒[1]のタイプに因数分解できない。

[2]二次式×二次式$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$について

与式$=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$と置く。

q,s がとり得る値は、$(1,-1),(-1,1)$

$q,s=(1,-1)$の場合についてみてみる。$q,s=(-1,1)$は、$q,s=(1,-1)$の場合と表裏の関係なので省略。

与式$=(x^2+px+1)(x^2+rx-1)=x^4+(p+r)x^3+(pr)x^2+(r-p)x-1$

与式の係数と比較すると次のようになる。

$(p+r)=0$･･･①

$(pr)=-9$･･･②

$(r-p)=-6$･･･③

①③より $p=3$、$r=-3$ となる。これを②式に代入すると、②式$=9$ と矛盾しない。⇒$p,r=(3,-3)$,$q,s=(1,-1)$で与式は因数分解できる。

∴与式$=(x^2+3x+1)(x^2-3x-1)$

A—⑫ $x^4+9x^3+16x^2-x-3$ の因数分解 x^4+9x^3+16x^2-x-3

【方針】

四次式を因数分解すると次のいずれかになると考えられるので、それぞれのパタ−ンについてとり得る係数を導出する。

[1]一次式×三次式･･･$(x-p)(x^3+qx^2+rx+s)$

[2]二次式×二次式･･･$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$

・解法

[1]一次式×三次式$(x-p)(x^3+qx^2+rx+s)$について

与式$=F(x)$と置く。p, s がとり得る値は、$(1,-3),(-1,3),(3,-1),(-3,1)$ なので、$F(1)$、$F(-1)$、$F(3)$、$F(-3)$を求める。

$F(1)\neq 0$、$F(-1)\neq 0$、$F(3)\neq 0$、$F(-3)\neq 0$ なので、$F(x)$は、$(x-p)$を因数に持たない。

⇒[1]のタイプに因数分解できない。

[2]二次式×二次式$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$について

与式$=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$と置く。

q,s がとり得る値は、$(1,-3),(-1,3),(3,-1),(-3,1)$

$q,s=(1,-3),(-1,3)$の場合についてみてみる。$q,s=(3,-1),(-3,1)$は、$q,s=(1,-3),(-1,3)$の場合と表裏の関係なので省略。

[2−1] $q,s=(1,-3)$ の場合

与式$=(x^2+px+1)(x^2+rx-3)=x^4+(p+r)x^3+(pr-2)x^2+(r-3p)x-3$

与式の係数と比較すると次のようになる。

$(p+r)=9$･･･①

$(pr-2)=16$･･･②

$(r-3p)=-1$･･･③

①③より $p=5/2$、$r=13/2$ となるが、これを②式に代入すると②式$\neq 16$ となり、矛盾。

⇒$q,s=(1,-3)$で与式は因数分解できない。

[2−2]$q,s=(-1,3)$ の場合

与式$=(x^2+px-1)(x^2+rx+3)=x^4+(p+r)x^3+(pr+2)x^2+(3p-r)x-3$

与式の係数と比較すると次のようになる。

$(p+r)=9$･･･①

$(pr+2)=16$･･･②

$(3p-r)=-1$･･･③

①③より $p=2$、$r=7$ となる。これを②式に代入すると、②式$=16$ と矛盾しない。

⇒$p, r=(2, 7)$, $q,s=(-1,3)$で与式は因数分解できる。

∴与式$=(x^2+2x-1)(x^2+7x+3)$

B―① x^2+x+1 の因数分解（係数が複素数の範囲で因数分解する場合） x^2+x+1

二次方程式x^2+px+q の因数分解 ⇒※

題意より p＝1、q＝1 をあてはめ、平方完成した上で、和と差の積による因数分解を行うと次のようになります。

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}\right)=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

B―② x^2-x+1 の因数分解（係数が複素数の範囲で因数分解する場合） x^2-x+1

二次方程式x^2+px+q の因数分解⇒ ※

題意より p＝−1、q＝1 をあてはめ、平方完成した上で、和と差の積による因数分解を行うと次のようになります。

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}\right)=\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

B―③ 前掲のＡ―①の x^4+x^2+1 の因数分解（係数が複素数の範囲で因数分解する場合） x^4+x^2+1

前掲のＡ―①、前掲のＢ―①②より、

$$与式=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\ =\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

B―④ x^2+3x-2 の因数分解（係数が実数の範囲で因数分解する場合） x^2+3x-2

二次方程式x^2+px+q の因数分解 ⇒※

題意より p＝3、q＝−2 をあてはめ、平方完成した上で、和と差の積による因数分解を行うと次のようになります。

$$x^2+3x-2=\left(x+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}\right)=\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)=\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

B―⑤ x^2-3x-2 の因数分解（係数が実数の範囲で因数分解する場合） x^2-3x-2

二次方程式x^2+px+q の因数分解 ⇒※

題意より p＝−3、q＝−2 をあてはめ、平方完成した上で、和と差の積による因数分解を行うと次のようになります。

$$x^2-3x-2=\left(x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2}\right)=\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)=\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

B―⑥ 前掲のＡ―⑦の $x^6-14x^4+17x^2-4$ の因数分解（係数が実数の範囲で因数分解する場合） x^6-14*x^4+17*x^2-4

前掲のＡ―⑦、前掲のＢ―④⑤より、

$$与式=(x+1)(x-1)(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)=(x+1)(x-1)\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

【雑感】

■分数の計算は、しばらくの間ごぶさたしていたので苦戦しました。例えば、前掲のＢ―⑤の

$\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ については、筆者の低性能な脳内で$\left(x-\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\right)$と整理した上で、$\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

を導出できました。ただ、このような分数を含む式については、$(x-(3-\sqrt{17})/2)(x-(3+\sqrt{17})/2)$ のような表記の方が単純明快かもしれません。

■動画サイトによっては「係数が実数の範囲で因数分解せよ」、「係数が複素数の範囲で因数分解せよ」としている問題も散見されます。前掲書『因数分解』の「ウルサイ」の意味が実感できます。一方で、単に「因数分解せよ」のように特に係数の範囲にことわりがなければ係数が整数の範囲でよいとする「因数分解の暗黙の掟」が慣習として定着しているのかもしれません。

※（統計図書館コラム【雑学編】号外（統計史料でみる昭和・平成期【その３】＋令和期 附録２）「2021 年を振り返るはずが」より）

二次方程式x^2+px+q [注] の因数分解

① p の二分の一を求める
② ①の二乗から q を引く
③ ②のルートを①に足し引き

【注】 x^2+px+q $=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2$$

$$=\left(x+\boxed{\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}\right)\left(x+\boxed{\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}\right)$$

①②③に相当

一口メモ
結局、平方完成した上で、和と差の積による因数分解を行っていることに・・・

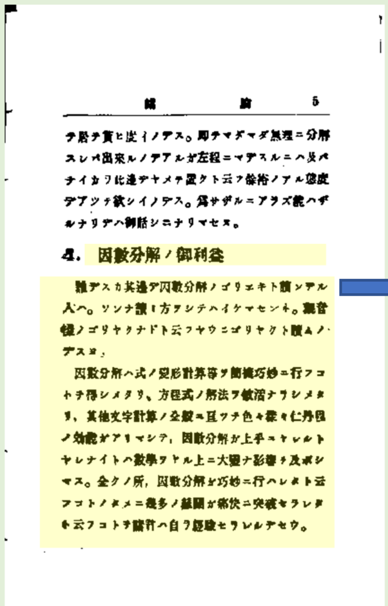
【因数分解の御利益】

前掲書『因数分解』の第一章は「因数分解ノ御利益」で締めくくっています。その冒頭で「誰ですかそのへんで因数分解のごりえきと読んでる人は。」で始まり、ざっくりいうと、「仁丹ほどの効能があり、･･･因数分解が上手にやれるとやれないとでは数学をやる上に大変な影響を及ぼします。因数分解が巧妙に行はれたということのために幾多の難関が痛快に突破することを諸君は自ら経験することになるでしょう。」と結んでいます。

因数分解に限らず、実社会では簡単にはいかない局面も多々ありますが、それを解決あるいは克服したときの達成感を味わうことができることを示唆しているように思います。

筆者は、この図書から数学以上のことを学ぶことができたように思います。まさに、国立国会図書館デジタルコレクションの御利益（ごりやく）･･････。一方で、筆者は、半世紀近く前に遡って反省する機会に恵まれたことを幸せに思います。

■数学研究会 編『因数分解』（抜粋）


緒 論 5

テ居テ貰ヒ度イノデス。即チマダマダ無理ニ分解スレバ出來ルノデアルガ左程ニマデスルニハ及バナイカラ此邊デヤメテ置クト云フ餘裕ノアル態度デアツテ欲シイノデス。爲サザルニアラズ能ハザルナリデハ御話シニナリマセヌ。

4. 因數分解ノ御利益

誰デスカ其邊デ因數分解ノゴリエキト讀ンデル人ハ。ソンナ讀ミ方ヲシテハイケマセンネ。觀音樣ノゴリヤクナドト云フヤウニゴリヤクト讀ムノデスヨ。

因數分解ハ式ノ變形計算等ヲ簡捷巧妙ニ行フコトヲ得シメタリ、方程式ノ解法ヲ敏活ナラシメタリ，其他文字計算ノ全般ニ亘ツテ色々樣々仁丹程ノ効能ガアリマシテ，因數分解ガ上手ニヤレルトヤレナイトハ數學ヲヤル上ニ大變ナ影響ヲ及ボシマス。全クノ所，因數分解ガ巧妙ニ行ハレタト云フコトノタメニ幾多ノ難關ガ痛快ニ突破セラレタト云フコトヲ諸君ハ自ラ經驗セラレルデセウ。

因数分解ノ御利益

誰デスカ其辺デ因数分解ノゴリエキト読ンデル人ハ。ソンナ読ミ方ヲシテハイケマセンネ。観音様ノゴリヤクナドト云フヤウニゴリヤクト読ムノデスヨ。

因数分解ハ式ノ変形計算等ヲ簡捷巧妙ニ行フコトヲ得シメタリ、方程式ノ解法ヲ敏活ナラシメタリ、其他文字計算ノ全般ニ亘ツテ色々様々仁丹程ノ効能ガアリマシテ、因数分解ガ上手ニヤレルトヤレナイトハ数学ヲヤル上ニ大変ナ影響ヲ及ボシマス。全クノ所、因数分解ガ巧妙ニ行ハレタト云フコトノタメニ幾多ノ難関ガ痛快ニ突破セラレタト云フコト云フコトヲ諸君ハ自ラ経験セラレルデセウ。･･･

【画像】https://dl.ndl.go.jp/ja/pid/916899/1/9（国立国会図書館デジタルコレクション）

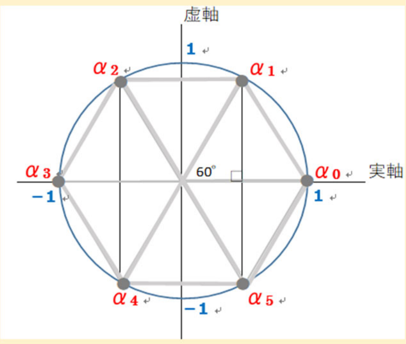
【あとがき】

因数分解の問を解くに際しては、高校で習う内容が中学で習う内容よりも高度になることから、対象（中学生か高校生かなど）も考慮して判断すべきかもしれません。「因数分解せよ」と出題されたら、中学生なら、係数が整数の範囲で因数分解することは言わずもがなのことなのかもしれません。高校生なら、係数の範囲を場合分け（整数、実数、複素数･･･）して因数分解する人、中学からの暗黙の掟を遵守する人、筆者のような人（冒頭参照）など、受け止めは区々かもしれません。

ところで、今回の調べもので、例えば「係数が実数の範囲で因数分解せよ」という問のニュアンスが悩ましかったです。この問は、整数は実数に包含されるので、係数を整数の範囲にとどめて因数分解しても、必ずしも不正解とは言えないように思います（筆者＠老害による屁理屈的な主張）。一方で、因数分解の暗黙の掟により、係数の範囲にことわりがなければ、係数が整数の範囲でよいと解されるところ、問が「係数が実数の範囲」となっているので、「係数が整数の範囲を超えて実数の範囲まで拡げて因数分解せよ」と解するべきと素直な優等生から主張されたら、筆者＠老害による屁理屈的な主張を取り下げ（抵抗せずに白旗をあげ）、意外と素直な老害を装うことに･･･なるか･･･等々、筆者の低性能な脳内で妄想が広がり、己の読解力の弱さを自覚する幸せを感じました。ただ、時には、この掟にかかわらず係数の範囲を広げて因数分解することにより、前掲書の「ウルサイ」を覚悟すれば新たな発見もあるかもしれません。筆者は、そのための前置行為として、改めて虚数の基礎について、動画サイトの視聴や初心者向けの入門書（中古）の購入により、学び直しをマイペースでスタートさせました。世界観が変わる予感がします(別図 参照)。

実社会で、暗黙の掟は、時代とともに変化しています。また、暗黙の掟だと思っていたことが、調べてみると、そんな掟は、そもそも存在していないといった場合もあります。ただ、それ以前の問題として、筆者の常識は世の中の非常識と感じることも多く、学び直しで、さらに増えそうです。

別図 複素数平面の活用による x^6-1 の因数分解（虚数の基礎を学習中の筆者の脳内イメージ（あの世に行くまでに完成予定））x^6－1



x^6-1 を係数が複素数の範囲で因数分解

$F(x)=x^6-1=(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)=0$ と置く。

因数定理より $F(1)=0$ なので $F(x)$は$(x-1)$を因数に持つ。

$\alpha_0=1$

$\alpha_1=\cos\pi/3+i\sin\pi/3=(1+\sqrt{3}i)/2$

$\alpha_2=\cos2*\pi/3+i\sin2*\pi/3=(-1+\sqrt{3}i)/2$

$\alpha_3=$(α_0の共役複素数)$=-1$

$\alpha_4=$(α_2の共役複素数)$=(-1-\sqrt{3}i)/2$

$\alpha_5=$(α_1の共役複素数)$=(1-\sqrt{3}i)/2$

$x^6-1=(x-1)(x-(1+\sqrt{3}i)/2)(x-(-1+\sqrt{3}i)/2)(x+1)(x-(-1-\sqrt{3}i)/2)(x-(1-\sqrt{3}i)/2)$

$=(x+1)\ (x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

余談１

当初、ド･モアブルの定理をフル回転(オヤジギャグ)して解こうとしていましたが、便利な共役複素数の手法に依存してしまいました。

今回、1 の n 乗根は全部で n 個あり、複素数平面の単位円周上に等間隔で並ぶ。単位円周上に(α_0、α_1・・・α_{n-1})プロットした点を結ぶと正 n 角形となることを学びました。そして、今更ながら次のことが分かりました。

・別図の複素数平面上の 1 の 6 乗根「α_0、α_2、α_4」の 3 点を結ぶと、正三角形となり、各頂点が 1 の 3 乗根に。

・別図の複素数平面上の 1 の 6 乗根「α_1、α_3、α_5」の 3 点を結ぶと、正三角形となり、各頂点が－1 の 3 乗根に。

⇒このことから、$x^6-1=(x^3+1)\ (x^3-1)$が別図の複素数平面上で直感的にイメージできます。

余談２

前掲の１の３乗根を学ぶ過程で、１の３乗根オメガ(ω)の特性（①$\omega^3=1$、②$\omega^2+\omega+1=0$、③$\omega^2=\overline{\omega}$、④$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)=0$）は、一つの実数解(1)と二つの虚数解（ω、$\omega^2$）を持ち、これらは共役複素数の関係にあり、一方が$(-1+\sqrt{3}i)/2$、他方が$(-1-\sqrt{3}i)/2$）であることを学ぶことができました。

その際、１の３乗根オメガ(ω)の特性を活用することで、因数分解を求める式において、(x^2+x+1)を因数に持つかの判定が可能になることを知りました。そして、それは半世紀近く前に１の３乗根の特性を独学でマスターしようとしなかった己のネガティブな姿勢を当時に遡って反省することに帰結しました。

・Ａ―⑧　x^7+x^2+1 の因数分解における(x^2+x+1)を因数に持つかの判定のイメージ(筆者の脳内)　x^7+x^2+1

与式を $F(x)$ と置き、$F(\omega)$、$F(\omega^2)$ を計算すると次のようになります。

$F(\omega)=\underline{(\omega^3)^2\times\omega}+\underline{\omega^2}+1$

$\omega^3=1$、$\omega^2+\omega+1=0$ なので

$F(\omega)=\omega+\omega^2+1=\omega^2+\omega+1=0$

$F(\omega^2)=\underline{(\omega^2)^7}+\underline{(\omega^2)^2}+1=\underline{\omega^{14}}+\underline{\omega^4}+1=\underline{(\omega^3)^4\times\omega^2}+\underline{\omega^3\times\omega}+1$

$\omega^3=1$、$\omega^2+\omega+1=0$ なので

$F(\omega^2)=\omega^2+\omega+1=0$

∴$F(x)$ は、(x^2+x+1) を因数に持つ。

・Ａ―⑨　$x^{14}+x^7+1$ の因数分解における(x^2+x+1)を因数に持つかの判定のイメージ(筆者の脳内)　x^14+x^7+1

与式を $F(x)$ と置き、$F(\omega)$、$F(\omega^2)$ を計算すると次のようになります。

$F(\omega)=\underline{\omega^{14}}+\underline{\omega^7}+1=\underline{(\omega^3)^4\times\omega^2}+\underline{(\omega^3)^2\times\omega}+1$

$\omega^3=1$、$\omega^2+\omega+1=0$ なので

$F(\omega)=\omega^2+\omega+1=0$

$F(\omega^2)=\underline{(\omega^2)^{14}}+\underline{(\omega^2)^7}+1=\underline{\omega^{28}}+\underline{\omega^{14}}+1=\underline{(\omega^3)^9\times\omega}+\underline{(\omega^3)^4\times\omega^2}+1$

$\omega^3=1$、$\omega^2+\omega+1=0$ なので

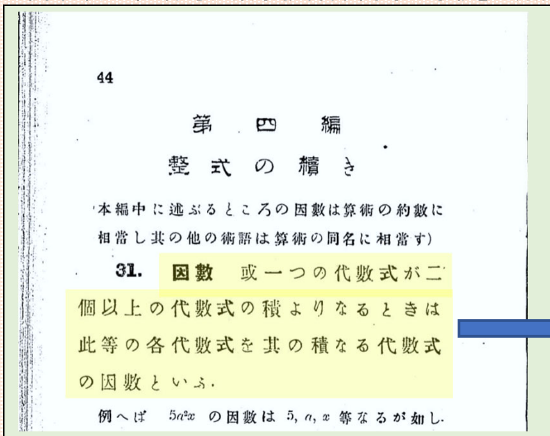
$F(\omega^2)=\omega+\omega^2+1=\omega^2+\omega+1=0$

∴$F(x)$ は、(x^2+x+1) を因数に持つ。

余談３

今回の調べもので「代数式の因数」をキーワードとして国立国会図書館デジタルコレクションでログインなしで閲覧可能（インターネット公開）な図書を適合度順に検索したところ、次の図書が最初にヒットしましたので、参考までに紹介します。

■関本幸太郎 著『代数学教科書:高等女学校』(明治 35 年 1902 年) (抜粋)



44

第四編

整式の積き

(本編中に述ぶるところの因數は算術の約數に相當し其の他の術語は算術の同名に相當す)

31. **因數**　或一つの代數式が二個以上の代數式の積よりなるときは此等の各代數式を其の積なる代數式の因數といふ.

例へば　$5a^2x$　の因數は $5, a, x$ 等なるが如し.

因數　或一つの代數式が二個以上の代數式の積よりなるときは此等の各代數式を其の積なる代數式の因數といふ

【画像】https://dl.ndl.go.jp/pid/828149/1/28 (国立国会図書館デジタルコレクション)

余談４

『デジタル大辞泉』によれば「因数」とは、「一つの数や整式が、いくつかの数や整式の積の形で表されるときの、その個々の数や整式のこと。」とされています。ここで、「整式」とは、同辞書によれば「分母や根号の中に文字が含まれていない代数式。」とされています。例えば「x^6-1」の因数分解は、$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$のほか、$(x^3+1)(x^3-1)$も…必ずしも不正解とは言えないように思います。この点について、『ブリタニカ国際大百科事典 小項目事典』によれば、「整式を因数分解する場合は、普通各因数を整数係数の多項式の範囲で止め、またこの範囲でそれ以上分解できないところまで因数分解するが、実係数もしくは複素係数で行なうこともある。」とされ、冒頭の「どこまで因数分解すればいいのか」という読解力の弱い筆者の疑問の解決の糸口にたどり着いた気がしました。

なお、筆者は、「普通」、「一般に…」の用語について、経験上、法令では、その曖昧さゆえに無意識のうちにその用語の使用を回避すべきものと勝手に理解してきたところ。これらの用語が登場すると、その解釈に悩んでしまいます。底辺の作業を生業とする公務員である筆者の悲しい相（さが）なのかもしれません。