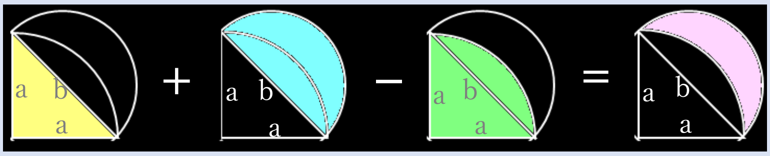
奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

統計を理解するための学び直し（その４）三日月の面積

【三日月の面積】
　統計を理解するための学び直しのため、面積を求める問題を探索したところ、直角二等辺三角形の斜辺を直径とする半円のうち次の三日月の面積を求める問題に出会いました。

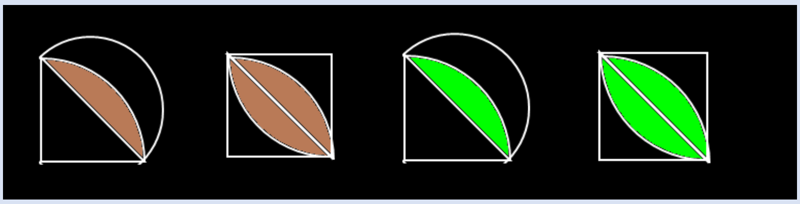
【三日月の面積の求め方のイメージ】
　この三日月の面積は、①直角二等辺三角形の面積に②直角二等辺三角形の斜辺を直径とする半円の面積を加えた面積から③扇形の四分円の面積を差し引くことにより求めることができます。



【三日月の面積を計算してみると π が消えた･･･】
　直角二等辺三角形の直角を挟む１辺を a、斜辺を b とすると、
①直角二等辺三角形の面積＝ $a^2 \times 1/2 = b^2 \times 1/4$
②直角二等辺三角形の斜辺 b を直径とする半円の面積＝ $\pi (b \times 1/2)^2 \times 1/2 = \pi b^2 \times 1/8$
③半径 a の四分円の面積＝ πa^2【注】$\times 1/4 = \pi (b^2 \times 1/2)$【注】$\times 1/4 = \pi b^2 \times 1/8$
　【注】①より、$\boxed{a^2 = b^2 \times 1/2}$（あるいは、三平方の定理より $a^2 + a^2 = b^2$ なので、$2a^2 = b^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 \times 1/2}$）
したがって、①＋②－③＝ $b^2 \times 1/4 + \pi b^2 \times 1/8 - \pi b^2 \times 1/8 = b^2 \times 1/4$

　つまり、求める三日月の面積＝①直角二等辺三角形の面積となり、②直角二等辺三角形の斜辺 b を直径とする半円の面積と③半径 a の四分円の面積が同じであることから、②から③を差し引く過程で π が消失したことは、筆者にとって衝撃的でした。

【図形の呼称】
　今回の問題を解くに当たり、次の図の呼称を学習した記憶がないことが判明しました。ハーフラグビーボール形あるいはラグビーボール形と予想するも、ヒットせず、ラグビーボールは何故あの形なのかを調べたところ、ニッセイ基礎研究所 の中村亮一氏のレポート「ラグビーボールはなぜ楕円の形をしているのか？」によれば、ラグビーボールは「長球あるいは長楕円体又は偏長楕円体）(prolate 又は prolate spheroid)」と呼ばれ、楕円をその長いほうの軸を回転軸として回転させたときに得られる回転体である」とされていました。また、ラグビーで有名な熊谷市（埼玉県）のＨＰにもラグビー豆知識を紹介する記事の一つに「ラグビーボールはなんで楕円なの？」があり、こちらのサイトも大変参考になりました。
　結局、面積問題に登場する次の図の茶色又は緑色の部分は、半楕円や楕円と呼んでも通じそうです。実は、筆者は、ラグビーボールのように尖りのある形は楕円に該当しないと予断していました。ちょっとだけ反省しました。ただ、個人的には、次の図を例えば、ハーフラグビーボールやハーフリーフもおしゃれな感じがするので、これらの呼び方を筆者の脳内においてのみ有効にしようと思います。

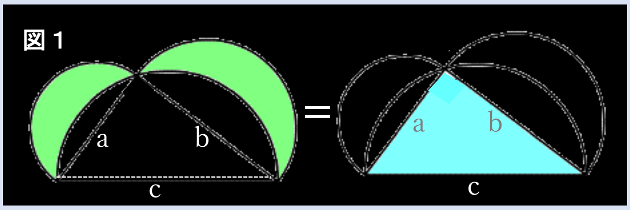


【雑感】
　今回の学び直しにより、直角二等辺三角形の面積は、底辺×高さ×1/2 のほか、斜辺×斜辺×1/4 によって求めることができることを想起し、小学生高学年レベル（中学受験レベル）の知識に近づくことができました。これは、数学の基礎の基礎である算数を確実に理解することの大切さを実感しました。引き続き、中学卒業レベルを目指します。
　また、今回、特に図のビジュアル化を意識しました。統計資料においてもビジュアル化が重要であると感じました。

【参考】ヒポクラテスの三日月（ヒポクラテスの定理）の考え方

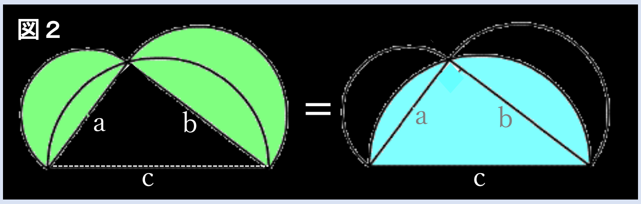
今回の問題は、ヒポクラテスの三日月（ヒポクラテスの定理）を想起します。
つまり、次の図１の緑の三日月の面積の和*は、青の直角三角形**の面積と等しいというものです。

図 1



* 緑の三日月の面積の和は、直径 a の半円の面積＋直径 b の半円の面積＋青の直角三角形の面積—直径 c の半円の面積
**青の直角三角形は、直角を挟む２辺の長さが a 、 b 、斜辺の長さが c で、直径 c の半円に内接

図 2



ところで、三平方の定理より $a^2+b^2=c^2$ なので、両辺に $\pi/8$ をかけると、$a^2*\pi/8+b^2*\pi/8=c^2*\pi/8$
$\Rightarrow (a/2)^2*\pi/2+(b/2)^2*\pi/2=(c/2)^2*\pi/2$
⇒直径 a の半円の面積＋直径 b の半円の面積＝直径 c の半円の面積･･･①　（⇒図２）

図 3

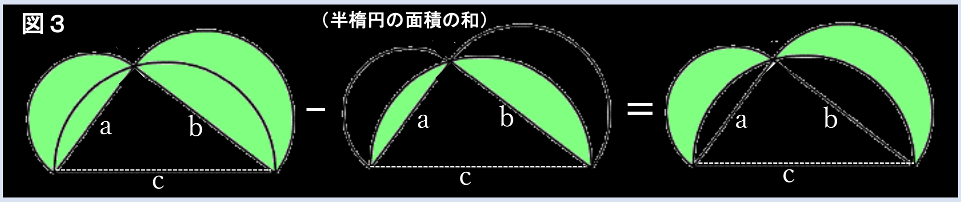


図 4

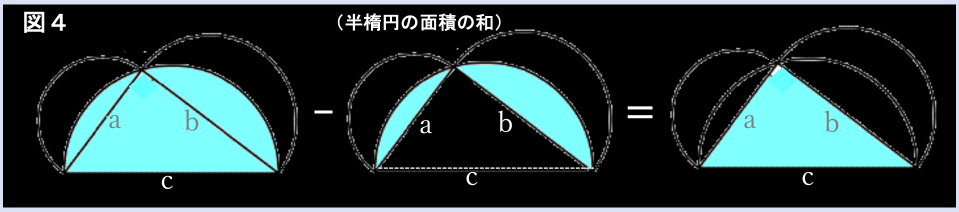
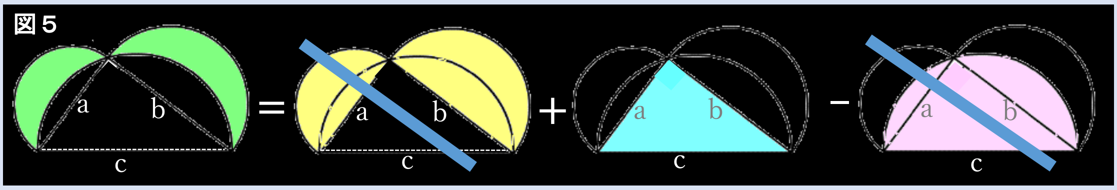


図２の左辺から長さ a の弦の半楕円の面積と長さ b の弦の半楕円の面積の和を差し引くと、次の図３のように長さ a の弦の三日月の面積と長さ b の弦の三日月の面積の和なります。
また、図２の右辺から長さ a の弦の半楕円の面積と長さ b の弦の半楕円の面積の和を差し引くと、次の図４の右辺の直角三角形の面積なります。
①より直径 a の半円の面積＋直径 b の半円の面積＝直径 c の半円の面積で、かつ、図３の半楕円の面積の和＝図４の半楕円の面積の和なので、
⇒図３の左辺（直径 a の半円の面積＋直径 b の半円の面積―半楕円の面積の和）＝図４の左辺（直径 c の半円の面積―半楕円の面積の和）
よって、図３の右辺（緑の三日月面積の和）＝図４の右辺（青の直角三角形の面積）（⇒図１が成立）

（補足）図１の緑の三日月の面積の和は、半楕円の面積を登場させずに求めることもできます。（⇒図５）
緑の三日月の面積の和＝直径 a の半円の面積＋直径 b の半円の面積＋青の直角三角形の面積—直径 c の半円の面積･･･②

①より、直径 a の半円の面積＋直径 b の半円の面積－直径 c の半円の面積＝0
よって、②⇒緑の三日月の面積の和＝青の直角三角形の面積（⇒図１が成立）

図 5



一口メモ
本コラムの冒頭の三日月の面積問題は、ヒポクラテスの三日月（ヒポクラテスの定理）における直角三角形を直角二等辺三角形と置き換えて考えることもできます。ちなみに、ここで登場するヒポクラテスは古代ギリシャの数学者で、古代ギリシャの医学者で医学の祖と言われるヒポクラテスとは別人だそうです。