奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

統計を理解するための学び直し（その３）グラフ理論

【グラフとは】
　バーゼル問題を解いた天才数学者オイラー（統計図書館ピックアップコラム【P04】で登場）について動画サイトで調べていたら、一筆書きの話から始まるグラフ理論について説明している甲先生のサイトと乙先生の二つのサイトに出会いました。失礼ながら、両先生とも、思わず円周率を計測したくなるほど丸い表情をされていたので、そちらが気になり、にわかにグラフ理論が筆者の脳ミソにインプットされず、何回か２倍速で視聴することになりました。結果として、なんとなく上っ面を薄く理解することができたような気がしてきました。グラフといえば、筆者の脳内では、統計グラフが入居しているほか、線や面をあらわす関数グラフやグラフ誌でいうグラフが･･･入居しています。グラフ理論でいうグラフは、定住していませんでした。おそらく、グラフという用語について、社会通念上、広狭さまざまに理解されるにもかかわらず、筆者は狭くとらえていた可能性があり、広義に、情報を視覚的に表したものと理解していなかったことをこの歳になって思い知らされました。そして数分間、そのことを反省しました。最近、反省することがあまりに多いことから、反省時間を短縮して、脳ミソへの負荷を軽減するように努力しています(そうしないと筆者の脳ミソがいじけそうな根拠のない不安を抱くため･･･)。

【グラフ理論】
　グラフ理論は、ざっくりいうと情報を点、頂点あるいは接点（ノード）と、これらを結ぶ線分、枝あるいは辺（エッジ）からなる図形で視覚的に表したものをグラフといい、このグラフに関する数学の理論をいうそうです。グラフ理論は、ケーニヒスベルクの七つの橋問題に端を発しているそうです(前掲の甲先生のサイトと乙先生の二つのサイトから、このことを知りました)。

【ケーニヒスベルクの七つの橋問題】
　ケーニヒスベルクの七つの橋問題について、国立国会図書館デジタルコレクションから、公開されている資料を探索したところ、大上茂喬編「数理の奇談 ： 世界叢話」（明治 44 年 1911年）に所収の「一筆書きの定理」に出会いました。

　同資料を参考に、「ケーニヒスベルクの七つの橋問題」の概要をまとめると次のとおりです(演出上の脚色あり)。

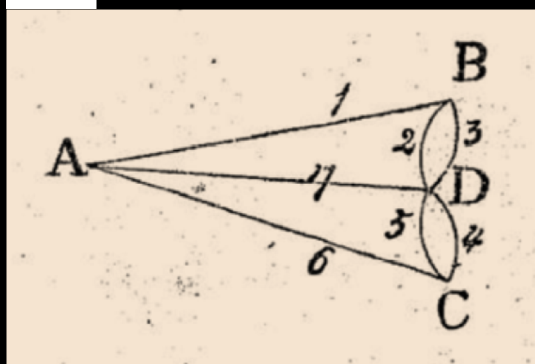
　18 世紀の初め、東プルシアの首府市東ケーニヒスベルク市（現在のロシア連邦のカリーニングラード）は、プレーゲル河に沿って立地し、ABC は市街地、D はクナイプホッフ島で、図１のように河には七つの橋があり、「市内を散歩して、七つの橋を 2 度通らずに、全て渡って、元の所に帰ってくることができるか。ただし、どこから出発してもよい。」という問題が出されました。この問題を解ける者はなかなか現れませんでした。それまで解明できなかったこの問題は、天才数学者オイラーによって解決されました。

　オイラーは、この問題を解くに際し、陸地や島の大小や橋の長短は、直接関係しないことから、点と線でグラフ化（単純化）をして、一筆書き可能であれば、七つの橋を 2 度通らずに、全て渡ることができると考え、まず、点の次数が偶数か奇数かに着目しました。（点の次数とは、その点においてつなげる線の数をいい、偶数次の点を偶点、奇数次の点を奇点といいます。）。
　グラフのイメージは図２のとおりです。

図１

（注）赤字は筆者が補記

図２



点：陸 ABC 又は島 D に相当するもので、一つ又は二つの橋の会する所をいう
線：橋に相当するもので、二つの点をつなげる線１～７をいう

【画像】前掲の「数理の奇談 ： 世界叢話」（国立国会図書館デジタルコレクション）

【一筆書きの定理】
オイラーが導き出した定理の構成は次のとおりで、彼は、ケーニヒスベルクの七つの橋問題について、奇点が４個あり、その定理の条件を満たさないことから、一筆書きが不可能であると証明しました。

一筆書きの定理の構成

●一筆書きが可能であるとしたら、

・奇点が０（=すべての点が偶点）

一口メモ　平たくいうと、奇点を有しないグラフは、一筆書きだけですべての部分を画くことができるということ。

・奇点の数がちょうど２個

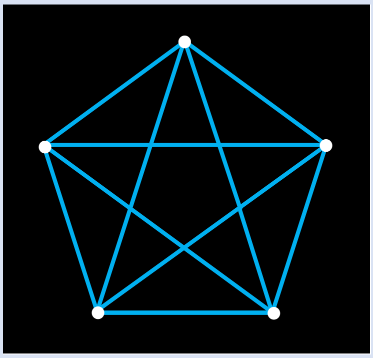
一口メモ　平たくいうと、奇点がちょうど二つの場合は、一方が始点、他方が終点の役割を果たすときに、一筆書きが可能で、３以上の奇点を有するグラフは一筆書きが不可能 。

●また、上の条件を満たすグラフは、一筆書きが可能

【雑感】
仕事で行き詰まって隘路から脱出できずに困ったとき、新たなルートを創設することなどで一筆書きができるようにすれば、どのような効果をもたらすかとか･･･、あるいは、複数の選択肢があってどれを選択すべきか悩んだとき冷静に最適な選択ができ、問題解決につながるヒントに出会えるような気がしました。いずれにしてもグラフ理論も含めて幅広に基礎的な数学を学習することは、劣化した筆者の脳ミソに刺激を与えるために役立つように感じました。的外れかもしれませんが･･･。

【余談】
資料によっては、点を頂点、線を辺と呼ぶものもあり、特に、線を辺と呼ぶことについては･･･小学校のテストなら「この辺でかんべんしてください」と答えたくなるほど衝撃的でした。ちなみに、次の図３(注)は、「完全グラフ」（どの２頂点間にも１本の辺があるグラフ）の一例だそうです。これだと、点を頂点と呼び、線を辺と呼ぶことには、違和感がありません。一方で、図２は頂点や辺と呼ぶことに違和感や抵抗感を覚える面もあります（底辺高校出身の筆者による下から目線です）。ただ、図２は、立体的なものを真上から見た場合と斜めから見た場合は見え方が異なり、前者では平面上の点にしか見えなくても、後者では頂点と認識できるかもしれません。前者では弧の形をした線にしか見えなくても、後者では辺と認識できるかもしれません。また、正方形の４つの角と中心点を結んだ図も、中心点や中心点と角を結ぶ直線は、立体的に見ればピラミッドの頂点や辺に見えてくるとか・・・これまでの筆者の人生では、予断をもって形状認識をしてきた面があり、このことも、また、数分間の自戒を込めた反省タイムが必要となりました。
（注）統計図書館ピックアップコラム【P05】の冒頭で掲載した黄金比を目の当たりにできた図を想起します。

図３　完全グラフの例



【あとがき】
筆者の脳内には、５年ほど前に決定木という用語は入居(注)していたのですが、今回の学び直しで、これも広義のグラフ(情報を視覚的に表したもの)として認識できるようになりました。そして、意思決定には、確率・統計、グラフ理論、決定木が有用であると確信しました。また、今回の学び直しを通じて統計に関する情報を視覚的に表すことの重要性を改めて認識しました。
(注)用語のみ入居。内容はほぼ未入居で、今後の入居予定はないかもしれません。