

統計を理解するための学び直し(その1) 円周率

【はじめに】

筆者は、これまでの人生で、直角三角形の各辺の呼び方について、気にしたことはなく、これを特定するときは、各辺に便宜 a 、 b 、 c と、符号をつければ、事足りると勝手に理解していました。先般、「確率は面積である」を意識してピタゴラスの定理をみる」の調べものの執筆過程において、古代中国や江戸時代の日本において、鉤股弦(こうこげん)という呼称があることを目の当たりにして、漢字の表現は時として、その理解を深めることがあるように感じました。

●「江戸時代の数学」(国立国会図書館HP)

この定理(ピタゴラスの定理)は中国の数学では鉤股弦(こうこげん)の法と呼ばれ、古代の数学書『周髀算経』や『九章算術』で取り上げられています。日本に入ってから鉤股弦という名称はそのまま使われました。鉤は「かぎの手」で直角を挟む短辺を、股は「足の分かれめ」で長辺を、弦は「弓のつる」で斜辺を意味しています。古代バビロニアや古代インドでもこの定理は発見されており、測量や建築、天文観測などで使われる重要な定理でした。三角関数もピタゴラスの定理と密接に関係しています。

現代では、鉤股弦の弦よりも斜辺の呼称が定着しているように思います。ただ、三角関数で \sin を正弦、 \cos (cosine) を余弦、law of sines を正弦定理、law of cosines を余弦定理…といった表現はある(⇒学習指導要領)のに、直角三角形の各辺の呼称としての鉤股弦(勾股弦)の用語が社会に浸透していないように思います。これらはセットで理解が深まるような気がします。英語では、直角三角形の各辺を hypotenuse (斜辺), opposite (対辺), adjacent (隣辺) と呼ぶそうです。hypotenuse の語源はギリシャ語の hupo(下)+teinousa(伸) だそうです。「そうだったのか」と何となく理解できます。一方で、筆者は、鉤股弦の弦もその響きがメロディーを感じさせるおしゃれな表現のように感じました(音痴な筆者による個人的見解です)。

●学習指導要領(文部科学省HP)

中学校学習指導要領解説数学編(平成29年7月)

図形の説明には、弧と弦の用語が登場しますが、三平方の定理のところでは直角三角形の3辺の呼び方として、鉤股弦は登場しません。

高等学校学習指導要領解説数学編(平成30年7月)

正弦や余弦、正弦定理、余弦定理の用語は登場しますが、鉤股弦は登場しません。

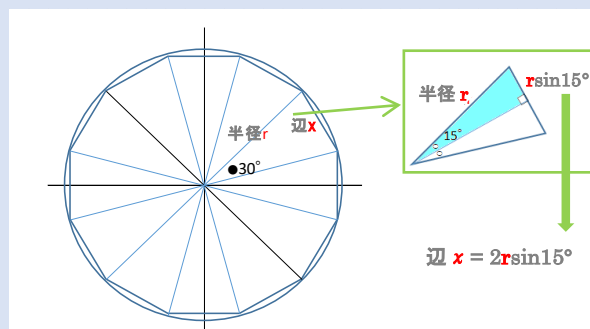
本稿では、前掲のコラム【No.P03】「「確率は面積である」を意識しながらピタゴラスの定理をみる」の執筆後、統計を理解するための基礎数学の学び直しとして、円周率などの初歩的な部分を調べてみましたので、その結果を紹介します。(統計図書館コラムの底流にある横道路線の巡回結果です。)

【円周率 $\pi > 3.05$ の証明】

円周率は、円の直径の長さに対する円周の長さの比で、近似値の算出方法について調べたところ、たまたま、円周率 $\pi > 3.05$ の証明を求めた問題(2003年の東京大学の入試問題)に出会いました。

インターネットで探索したところ、証明方法の一つに半径 r の円に内接する正十二三角形の一辺 x の長さから、円周率 $\pi > 3.05$ の証明をする方法がありました。これは、直角三角形の $\sin 15^\circ$ を活用*して正十二三角形の一辺 x の長さを求め、これを12倍したものから円周率に近似した値を導き出すことができ、その結果により、題意の「円周率 > 3.05 の証明」につながる可能性がある…という方針の下で証明するものです¹。証明の考え方は、次のとおりです。

図 半径 r の円に内接する正十二三角形



* 30° の扇形(半径 r)に内接する二等辺三角形は、 15° の直角三角形二つを合わせたものであることから、正十二三角形の一辺 $x = 2r \sin 15^\circ$

$$\text{正十二三角形の辺 } x = 2r \sin 15^\circ$$

三角形の加法定理より (半角の公式による方法もありますがここでは割愛します)

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-1)}{4} \approx \frac{1.414 \times (1.732-1)}{4} = \frac{1.035}{4}$$

$$\text{正十二三角形の辺の長さの合計} = 2r \sin 15^\circ \times 12$$

$$2\pi r > 2r \sin 15^\circ \times 12 > 3.05 \times 2r$$

$$\pi r > r \sin 15^\circ \times 12 > 3.05 \times r$$

$$\pi > \sin 15^\circ \times 12 > 3.05$$

$$\pi > \frac{1.035}{4} \times 12 (= 1.035 \times 3 = 3.105) > 3.05$$

$$\text{よって } \pi > 3.05$$

※加法定理や半角の公式を使わない証明の考え方は、【別記】参照

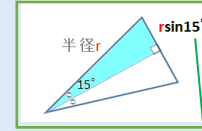
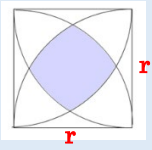
¹ 正六角形の場合、一辺(x)の長さが半径rなので、六辺の合計が $2r \times 3$ (直径の3倍) となり、円周率 $\pi > 3.05$ の証明ができないことから正十二三角形で証明しようとするもの。

【面積の問題】

40年以上前、次の図の色塗りの部分を解く問題で、**解法1**のイメージができるまで、非常に苦戦した記憶があります。

前掲の円周率 $\pi > 3.05$ の証明は、直角三角形の $\sin 15^\circ$ を活用するものでしたが、 $\sin 15^\circ$ を活用することで、40年以上前苦戦した次の図の面積を求めることができるような気がしたので…インターネットで探索したところ、見事にヒットしました。その解法を筆者が理解しやすいようにアレンジ、脚色したイメージは**解法2**のとおりです。

図



解法1のイメージ (筆者の脳内イメージ)	解法2のイメージ (筆者の脳内イメージ)
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>1</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>2</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>3</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>4 (⇒①)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>5</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>6</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>7 (⇒②)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>8 (⇒4×②)</p> </div> </div> <p style="text-align: center; margin-top: 5px;">⇒ $r^2 - 4 \times \text{②} \Rightarrow \mathbf{1}$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>1</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>2</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>3</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>4 (⇒①)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>5 (⇒4×①)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>6 (⇒②)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>7 (⇒4×①+②)</p> </div> </div> <p style="text-align: center; margin-top: 5px;">⇒ $\mathbf{7} = \mathbf{1}$</p>
<p>2の 60° の扇形の面積 - 3の 60° の扇形に内接する正三角形の面積 (⇒④)</p> $\frac{\pi}{6} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r \times \frac{1}{2} r = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2 \dots \text{①}$ <p>5の 30° の扇形の面積 - ①</p> $\frac{\pi r^2}{12} - \text{①} = \frac{\pi r^2}{12} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2 = \frac{\pi}{12} - \left(\frac{2\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2$ $= \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2 \dots \text{②}$ <p>1⇒一辺が r の正方形の面積 - $4 \times \text{②}$ 【注】</p> <p>【注】 $4 \times \text{②} \Rightarrow \mathbf{8}$</p> $r^2 - 4 \times \text{②} = r^2 - 4 \times \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2$ $= r^2 - 4 \times \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2 = r^2 + \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \times r^2$ $= \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \times r^2$	<p>2の 30° の扇形の面積 - 3の 30° の扇形に内接する二等辺三角形の面積 = 30° の扇形の面積 - (底辺 $r \times$ 高さ $r/2$) $\times 1/2$ = 30° の扇形の面積 - (半径 $r \times$ 半径 r) / 4</p> $\frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4} = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) \times r^2 \dots \text{①}$ <p>正十二角形の一辺 $x = 2r \sin 15^\circ$</p> $= 2 \times r \times \frac{\sqrt{2} + (\sqrt{3}-1)}{4} = r \times \frac{\sqrt{2} + (\sqrt{3}-1)}{2}$ <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <p>斜辺 r 高さ $r/2$ 底辺 r (r = 半径)</p> </div> <p>6の一辺が x の正方形の面積 【注】</p> $x^2 = \left(\frac{\sqrt{2} + (\sqrt{3}-1)}{2}\right)^2 \times r^2$ $= \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right) \times r^2 = (2 - \sqrt{3}) \times r^2 \dots \text{②}$ <p>7⇒ $4 \times \text{①} + \text{②} = 4 \times \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) \times r^2 + (2 - \sqrt{3}) \times r^2$</p> $= \left(\frac{\pi}{3} - 1\right) \times r^2 + (2 - \sqrt{3}) \times r^2$ $= \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \times r^2$
<p>【注】 辺 x^2 は、余弦定理により求めることもできます。 辺 $x^2 = r^2 + r^2 - 2 r^2 \cos 30^\circ = 2 r^2 - 2 r^2 * \sqrt{3}/2 = (2 - \sqrt{3}) r^2$</p>	

【雑感】

40年以上前に苦戦した面積の問題について、今回、たまたま、これまで理解していた解法とは別の解法を知ることができました。筆者の脳内の脆弱な CPU は 40 年前に解法1のみで演算を終了していたところ、別件で解法2に出会えたことは、快いできごとでした。一方で、意思形成過程における試行錯誤の大切さを改めて認識するとともに、筆者のこれまでの的外れな公務員生活は反省すべきことがまだまだありそうな予感がしました。また、今回、円周率の初歩を学んだことにより、モンテカルロ法による円周率の近似値の計算方法の理解に近づけそうな気がしてきました。その前提となる基礎体力としての数学を理解するまでは、しばらく時間が必要ですが、横道にそれながら…学び直しを楽しもうと思います。そして、「確率は面積である」を少しでも理解しようと思います。

【あとがき】

本稿の原案を書き終えた頃、今回、参照した動画サイトについてプレゼンテーションの方法の観点から学ぶべき点があるか2倍速で、横道にそれながら視聴していたところ、第三の解法(解法3)に出会いました。求める部分の面積を四分割し、30°の扇形の面積から二つの対称関係にある三角形の面積を差し引き、四分割した一片の面積を求め、これを4倍するものでした。筆者が理解しやすいようにアレンジ、脚色した解法のイメージ(※)を紹介します。

※補足説明 次の図のように30°の扇形から、四分割した一片を除いた部分に着目し、四分割の中心から扇形の中心角に向けて線を引くことにより、対称な三角形二つを生成。切り口はYを右45°傾けた形になります。

解法3のイメージ (筆者の脳内イメージ)

1の色塗り面積を四分割した面積 (= 2の面積)
= 5の30°の扇形の面積 - 6の二つの対称な三角形の面積

$$= \frac{\pi r^2}{12} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}r\right) \times \frac{1}{2}r \times \frac{1}{2} \times 2$$

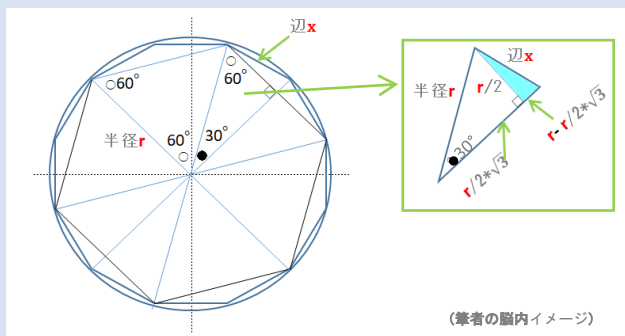
$$= \frac{\pi r^2}{12} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} \times r^2\right) \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \times 4 = \frac{\pi r^2}{3} - (\sqrt{3}-1) \times r^2 = \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \times r^2$$

一口メモ プレゼンテーションにおいて、図に描きたいものを言葉で説明することの難しさを痛感しました、

【別記】別の方法による【円周率 $\pi > 3.05$ の証明】の考え方 (その1)

図 半径 r の円に内接する正六角形・正十二角形



正十二角の一辺 x (30°の扇形(半径 r)に内接する二等辺三角形の辺 x を斜辺とする左図の直角三角形(水色で塗りつぶした部分)は、ピタゴラスの定理により、次式が成立。

$$\begin{aligned} \text{辺}x^2 &= (r - r/2 * \sqrt{3})^2 + (r/2)^2 = (1 - \sqrt{3}/2)^2 * r^2 + (r/2)^2 \\ &= (1 - \sqrt{3} + 3/4) * r^2 + (1/4) * r^2 = (2 - \sqrt{3}) * r^2 = ((4 - 2\sqrt{3})/2) * r^2 \\ &= ((1 - \sqrt{3})^2/2) * r^2 \quad \text{【注】} \end{aligned}$$

辺 $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{辺}x &= \sqrt{x^2} = ((\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}) * r = (\sqrt{2} (\sqrt{3}-1)/2) * r \\ &\doteq (1.414(1.732-1)/2) * r = ((1.414*0.732)/2) * r = (1.035/2) * r \end{aligned}$$

正十二角形の辺 x の計 = $x * 12 = (1.035/2) * r * 12$

$$\begin{aligned} 2\pi r &> (1.035/2) * r * 12 \\ \pi &> (1.035/2) * 6 \\ &= 1.035 * 3 = 3.105 > 3.05 \\ \text{よって } \pi &> 3.05 \end{aligned}$$

【注】 辺 x^2 は、余弦定理により求めることもできます。

$$\text{辺}x^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 30^\circ = 2r^2 - 2r^2 * \sqrt{3}/2 = (2 - \sqrt{3})r^2 = ((4 - 2\sqrt{3})/2) * r^2 = ((1 - \sqrt{3})^2/2) * r^2$$

【別記】別の方法による【円周率 $\pi > 3.05$ の証明】の考え方 (その2)

パーゼル問題 (平方数の逆数和)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

平方数の逆数和について $n = 11$ で近似値を計算。

$$\sum_{n=1}^{11} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1.558$$

$$\pi^2 \doteq 1.558 \times 6 \doteq 9.348 > (3.05)^2 = 9.3025$$

$\pi > 0$

よって $\pi > 3.05$

n	n ²	1/n ²
1	1	1.000
2	4	0.250
3	9	0.111
4	16	0.063
5	25	0.040
6	36	0.028
7	49	0.020
8	64	0.016
9	81	0.012
10	100	0.010
11	121	0.008
計		1.558

一口メモ パーゼル問題 (平方数の逆数和) は、1644年にピエトロ・メンゴリによって提起され、91年後の1735年にオイラーによって解かれたそうです。

【附録】

「 $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ」という問題

東京大学の $\pi > 3.05$ の証明問題の 10 年後の 2013 年に大阪大学の入試で $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよという問題が出されたそうです。

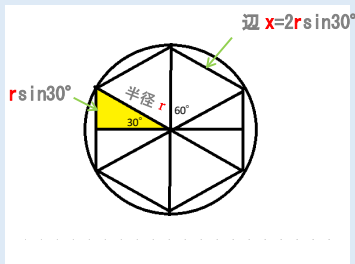
【解法その 1】円に内外接する正多角形の辺の長さから近似させる

D E G (degree の略)モードで度数単位の三角関数の計算が可能な電卓の力を借りてチャレンジしてみました。

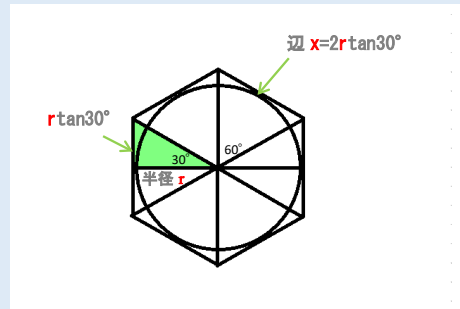
解法の考え方は、下界 (lower bound ○かき、×げかい) については前掲の $\pi > 3.05$ の証明問題で \sin を用いて円に内接する正 n 角形の辺の長さの合計の半径(直径)に対する比を求め、正 n 角形の n を大きくすることにより円周率に近似させ、上界 (upper bound) については \tan を用いて円に外接する正 n 角形の辺の長さの合計の半径(直径)に対する比を求め、正 n 角形の n を大きくすることにより円周率に近似させようとするものです。

筆者の脳内イメージ(正六角形の場合)

円に内接する正六角形



円に外接する正六角形



解法の考え方

インターネットで探索した結果を基に筆者の脳内でアレンジ、脚色して解法をまとめてみました。

円に内接する正 n 角形の中心角は $(360/n)^\circ \rightarrow$ 正 n 角形の 1 辺の長さは半径の $\sin(360/2n)^\circ \times 2$ 倍
 \rightarrow 円に内接する正 n 角形の 1 辺の長さの辺の合計は \rightarrow 半径の $\sin(360/2n)^\circ \times 2 \times n$ 倍
 $=$ 直径の $(\sin(360/2n)^\circ \times 2 \times n) / 2$ 倍 $\dots \textcircled{1}$

円に外接する正 n 角形の中心角は $(360/n)^\circ \rightarrow$ 正 n 角形の 1 辺の長さは半径の $\tan(360/2n)^\circ \times 2$ 倍
 \rightarrow 円に外接する正 n 角形の 1 辺の長さの辺の合計は \rightarrow 半径の $\tan(360/2n)^\circ \times 2 \times n$ 倍
 $=$ 直径の $(\tan(360/2n)^\circ \times 2 \times n) / 2$ 倍 $\dots \textcircled{2}$

①、②と円周率 π (直径に対する円周の比)の関係は
 $(\sin(360/2n)^\circ \times 2 \times n) / 2 < \pi < (\tan(360/2n)^\circ \times 2 \times n) / 2 \Rightarrow \sin(360/2n)^\circ \times n < \pi < \tan(360/2n)^\circ \times n$
 つまり、 $n \rightarrow \infty$ になれば正 n 角形の辺の合計はこれに内接又は外接する円周に近似する。

正六角形 $\sin 30^\circ \times 6 < \pi < \tan 30^\circ \times 6 \Rightarrow 3 < \pi < 3.46410161514 \rightarrow$ 問題の $3.141 < \pi < 3.142$ の下界・上界をクリアできず

正十二角形 $\sin 15^\circ \times 12 < \pi < \tan 15^\circ \times 12 \Rightarrow 3.10582854123 < \pi < 3.21539030917 \rightarrow$ 問題の $3.141 < \pi < 3.142$ の下界・上界をクリアできず

※アルキメデスは、紀元前 3 世紀、ざっくりいうと、 $\sqrt{3}$ の近似値を利用して円に外接及び内接する正九十六角形の辺の長さの上界と下界をそれぞれ計算することにより、 $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ ($3.14084 < \pi < 3.14286$) を導き出しました。ただ、問題の $3.141 < \pi < 3.142$ をクリアしてませんでした。このため、角数を更に多くすることにし、キリのいい正百角形、正百二十角形、正百八十角形...について確認してみました。

正百角形 $\sin 1.8^\circ \times 100 < \pi < \tan 1.8^\circ \times 100 \Rightarrow 3.14107590781 < \pi < 3.14262660434 \rightarrow$ 問題の $3.141 < \pi < 3.142$ の上界をクリアできず

正百二十角形 $\sin 1.5^\circ \times 120 < \pi < \tan 1.5^\circ \times 120 \Rightarrow 3.14123379694 < \pi < 3.1423105883 \rightarrow$ 問題の $3.141 < \pi < 3.142$ の上界をクリアできず

正百八十角形 $\sin 1^\circ \times 180 < \pi < \tan 1^\circ \times 180 \Rightarrow 3.14143315871 < \pi < 3.14191168708 \rightarrow$ 問題の $3.141 < \pi < 3.142$ の下界・上界をクリア

(おまけ)

正千八百角形 $\sin 0.1^\circ \times 1,800 < \pi < \tan 0.1^\circ \times 1,800 \Rightarrow 3.14107590781 < \pi < 3.14159584354$

正一万八千角形 $\sin 0.01^\circ \times 18,000 < \pi < \tan 0.01^\circ \times 18,000 \Rightarrow 3.14159263764 < \pi < 3.14159268549$

正十八万角形 $\sin 0.001^\circ \times 180,000 < \pi < \tan 0.001^\circ \times 180,000 \Rightarrow 3.14159265343 < \pi < 3.14159265391$

【解法その2】積分表示を使って近似させる

大阪大学の「 $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ」という問題は、次のとおり2つの設問で構成されています。

「円周率を π とする正の整数 n に対し、

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1-x^{4n}}{1+x^2} dx$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2} dx \text{ とおく}$$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。

(2) $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし、 $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

まず、設問(2)の解法の方針をイメージしてみました。「 $\pi > 3.05$ を証明せよ」の問題と同様、正十二角形で中心角が 30° なので $\sin 15^\circ$ を活用するにしても、問題は「 $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ」なので、中心角 30° よりも鋭利な角を設定する必要があり、三角関数の半角の公式で前掲のように $\sin 15^\circ$ を求め、黄金比から $\sin 18^\circ$ (⇒統計図書館コラム【No P05】) を求めるなどして、三角関数の加法定理で $\sin 18^\circ$ 、 $\cos 18^\circ$ と $\sin 15^\circ$ 、 $\cos 15^\circ$ を用いて $\sin 3^\circ$ 、 $\cos 3^\circ$ (→中心角 6° の正六十角形) を求め、それでも題意を満たさなかったら、三角関数の三倍角の公式で $\sin 1^\circ$ 、 $\cos 1^\circ$ (→中心角 2° の正百八十角形) を求めることなどに展開する可能性も考えられますが、黄金比だと $\sqrt{5}$ が必要になります。この問題で $2-\sqrt{3}$ や $\sqrt{3}$ が登場し、 $\sqrt{5}$ が登場していないことから、筆者の根拠のない直感によれば、これは出題者による誘導と感じました。

解法をインターネットで探索したところ、三角関数 \tan の逆関数についての積分表示を用いて円周率の近似値を求める方法にヒットしました。

解法の考え方

インターネットで探索した結果を基に筆者の脳内でアレンジ、脚色して解法をまとめてみました。

step1 まず、 $0 < x < 1$ のもとで、 n の初期値 0 の数列 $1-x^4$ 、 $1+x^6$ 、 $1-x^8$ 、 $1+x^{10}$ ……の各項を $(1+x^2)$ で因数分解します。この数列は、振幅しながら n が大きくなるほど 1 に近づきます。因数分解の結果は、次のようになります。

$$(1+x^2)(1-x^2) = 1-x^4$$

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4) = 1+x^6$$

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6) = 1-x^8$$

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8) = 1+x^{10}$$

...

以上の式から次の不等式が成り立ちます。

$$(1+x^2)(1-x^2) < 1$$

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4) > 1$$

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6) < 1$$

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8) > 1$$

...

以上の式の両辺を $(1+x^2)$ で割ると次のようになります。

$$1-x^2 < \frac{1}{1+x^2}$$

$$1-x^2+x^4 > \frac{1}{1+x^2}$$

$$1-x^2+x^4-x^6 < \frac{1}{1+x^2}$$

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8 > \frac{1}{1+x^2}$$

...

step2 $\tan \theta = \text{高さ/底辺}$ $\tan \theta$ の逆関数は $\arctan(\tan \theta) = \theta$

$$\arctan(\tan \theta) = \int_0^{\tan \theta} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\tan \theta} (1-x^2+x^4-x^6+x^8 \dots) dx$$

ここで $\tan 45^\circ$ 、 $\tan 30^\circ$ 、 $\tan 15^\circ$ の逆関数を求めると、次のとおりとなります。

$$\tan 45^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \textcircled{1} \arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{【注】}$$

$$\tan 30^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \textcircled{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \text{【注】}$$

$$\tan 15^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} \quad \textcircled{3} \arctan(2 - \sqrt{3}) = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{12} \quad \text{【注】}$$

【注】 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ において、 $x = \tan \theta$ とおく。 $x = \tan \theta$ の両辺を微分すると、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$$\text{また、} 1+x^2 = 1+\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 \theta \Rightarrow \text{したがって、} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{同様に、} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}、\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{12}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12}$$

step3 問題を解く際に、**step2**の①、②、③のどれを活用するかを考えてみます。①は収束が他に比べ遅そうです。②は、③よりは収束が遅そうですが、③よりも手計算(べき乗)にエネルギーを使わずに済みそうです。とりあえず、②で決め打ちして解いてみることにしました。

step1 で求めた式の両辺を $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ の区間で積分し、**step2**の② $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6}$ を踏まえると、次の不等式が成り立ちます。

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2)dx < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2)dx < \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4)dx > \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4)dx > \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4-x^6)dx < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4-x^6)dx < \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4-x^6+x^8)dx > \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4-x^6+x^8)dx > \frac{\pi}{6}$$

...

Step4

上記式をさらに次のように整理し、問題の「 $3.141 < \pi < 3.142$ 」を満たすまで π の近似値の下界・上界をみていくことにします。

$$6 * \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2)dx = 6 * [x - \frac{1}{3}x^3]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 6 * (\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 * (\sqrt{3})^3}) = \frac{6}{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{3 * (\sqrt{3})^2}) = 2\sqrt{3} (1 - \frac{1}{3 * 3}) < \pi$$

$$6 * \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4)dx = 6 * [x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 6 * (\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 * (\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5 * (\sqrt{3})^5}) = \frac{6}{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{3 * (\sqrt{3})^2} + \frac{1}{5 * (\sqrt{3})^4}) = 2\sqrt{3} (1 - \frac{1}{3 * 3} + \frac{1}{5 * 3^2}) > \pi$$

$$6 * \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4-x^6)dx = 6 * [x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} (1 - \frac{1}{3 * 3} + \frac{1}{5 * 3^2} - \frac{1}{7 * 3^3}) < \pi$$

$$6 * \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x^2+x^4-x^6+x^8)dx = 6 * [x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} (1 - \frac{1}{3 * 3} + \frac{1}{5 * 3^2} - \frac{1}{7 * 3^3} + \frac{1}{9 * 3^4}) > \pi$$

...

表計算ソフトによる計算結果は次のとおりです。

n	①=(-1) ⁿ	②=2n+1	③=3 ⁿ	④=①/(②*③)	⑤=④の累計	⑥=2√3*⑤		
0	1	1	1	1.0000000000				
1	-1	3	3	-0.1111111111	0.8888888889	3.079201436	下界	問題の3.141 < π < 3.142の下界をクリアできず
2	1	5	9	0.0222222222	0.9111111111	3.156181472	上界	問題の3.141 < π < 3.142の上界をクリアできず
3	-1	7	27	-0.0052910053	0.9058201058	3.137852892	下界	問題の3.141 < π < 3.142の下界をクリアできず
4	1	9	81	0.0013717421	0.9071918479	3.142604746	上界	問題の3.141 < π < 3.142の上界をクリアできず
5	-1	11	243	-0.0003741115	0.9068177364	3.141308785	下界	問題の3.141 < π < 3.142の下界をクリア
6	1	13	729	0.0001055186	0.9069232551	3.141674313	上界	問題の3.141 < π < 3.142の上界をクリア

⇒ n=5、n=6 より、3.1413... < π < 3.1416... となり、3.141 < π < 3.142 を満たします。

[注] 出題者の誘導を最大限尊重するためには問題の冒頭の a_n、b_nの式を活用する方法もあるようですが、本稿では割愛します。

【あとがき】

今回の学び直しでは、tanθ の逆関数、 $\int_0^{\tan\theta} \frac{1}{1+x^2} dx$ に関連して置換積分なども理解する必要があり、中学卒業レベルの基礎数学のマスターを目指す筆者にとって相当の時間を要しました。

今回、ちょっと背伸びをしすぎた感もありますが、中学卒業レベルの基礎数学をマスターしてはじめて高校卒業レベルに近づくことができると確信しました。

雑感

今回の学び直しで、円周率を理解するために三角関数が有用であり、**真の値にアプローチしようとする姿勢は、統計に通じるものがあると実感**しました。また、今回の学び直しで「 $2-\sqrt{3}$ 」について、40年以上前に苦戦した面積問題の前掲の図を手がかりに、図でイメージすることができました。この図から $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ を瞬時に導き出せます。

筆者の脳内イメージ

鋭角が 15° の直角三角形

鋭角が 30° の直角三角形

さらに、斜辺を求めれば、 $\sin 15^\circ$ 、 $\cos 15^\circ$ も導き出せます。
 (斜辺) $^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2 = 1+7-4\sqrt{3} = 2*(4-2\sqrt{3}) = 2*(\sqrt{3}-1)^2$
 斜辺 $= \sqrt{2}*(\sqrt{3}-1) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$
 $\sin 15^\circ = (2-\sqrt{3})/(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{3})*(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4 = (2\sqrt{6}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{6})/4 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$
 $\cos 15^\circ = 1/(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$

一口メモ

右の図のように正方形の折り紙を2か所折ることによっても「 $2-\sqrt{3}$ 」が登場します。
 右図の赤枠は鋭角が 30° の直角三角形

- ・高さ「 $2-\sqrt{3}$ 」
- ・底辺「 $2\sqrt{3}-3$ 」
- ・斜辺「 $4-2\sqrt{3}$ 」

【参考資料】

- ・Newton ライト 2.0「数学パズル 図形編」第9問
- ・「折り紙で正三角形を作るには？」(動画サイト)
<https://www.youtube.com/watch?v=xYtabVWhlTw>

(折り紙のイメージ図)

(筆者の脳内イメージ)

【余談1】 $\arctan(1)$ は、電卓で計算すると $0.78539\dots$ (ラジアン) であり、小数点第5位以下を切り捨てると 0.7853 、小数点第5位以下を切り上げると 0.7854 。ところで、 $\arctan(1) = \pi/4$ なので $\pi = 4*\arctan(1)$ 。

したがって、 $4*0.7853 < \pi < 4*0.7854 \Rightarrow 3.1412 < \pi < 3.1416$ となり、前掲の大阪大学の入試問題「 $3.141 < \pi < 3.142$ 」を満たします！

【余談2】 今回の学び直しで、 $\pi/4$ をみると、①モンテカルロ法による円周率の近似値の計算方法における「確率は面積である」と② $\arctan(1)$ の値を想起するようになりました(的外れな話かもしれませんが...)。つまり、円周率の近似値を求める場合の一辺が r の正方形において**半径 r の四半円の部分**に命中する確率は $(\frac{\pi r^2}{4}) \div r^2 = \pi/4$ であり、 $\arctan(1) = \pi/4$ と一致しています。

筆者の脳内イメージ

一口メモ $r=2$ のとき、半径2の**四半円の部分の面積** $= \pi \times 2^2 \times \frac{1}{4} = \pi$
 $=$ 半径1の円の面積 $= \pi \times 1^2 = \pi$

筆者の脳内イメージ

雑感 円周率を面積としてとらえることができ、筆者にとって「確率は面積である」と同じくらい衝撃的でした。

【余談3】 天才数学者ラマヌジャンの円周率に関する公式に次のものがあります。その公式の証明に係る資料でインターネットで公開されているものをいくつか参照したのですが、何でこうなるのかを筆者が理解できるメドは立ってません。

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{\pi \cdot 99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$$

$n=0$ で π の近似値を計算すると次のようになります。ちなみに、ゼロの階乗が1となること ($0! = 1$) については、今回の学び直しなければ、一生忘れたままでした。

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{\pi \cdot 99^2} \frac{(4*0)!(1103+26390*0)}{(4^0 99^0 0!)^4} = \frac{2\sqrt{2}*1103}{99^2}$$

$$\pi = \frac{99^2}{2\sqrt{2}*1103} = 3.141592\dots$$

【参考資料】

Newton ライト 2.0「 π 」、同「三角関数」などの入門書のほか、「 π の逆襲 DESTINY」(動画サイト)、慶應義塾大学理工学部HP「積分表示」と「近似」の美しい世界」