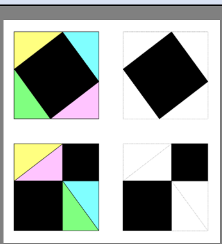
奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

# 「確率は面積である」を意識しながらピタゴラスの定理をみる

**【はじめに】**

たまたま「確率は面積である」という動画の題名をみて、感銘を受けました。これに関連して、何の脈絡もなく、面積と言えばピタゴラスの定理 [1]を想起し、戦前の教科書等（【別記】）や関係資料について、標題のフレーズを意識して調べてみました。

**本稿では、**筆者の脳内（前近代的低性能ＣＰＵ内蔵）でその証明方法が最も容易に連想できた図（【別記】の資料１～３の赤枠の図）と、その図を凝視した直後における筆者の脳内イメージ（直下の図）や証明の考え方などのトピック（話題）を紹介します



（筆者の脳内イメージ）

**【別記】ピタゴラスの定理を図解した戦前の我が国の教科書等**

（文部科学省国立教育政策研究所ＨＰ（近代教科書デジタルアーカイブ））
- 「高等小学算術書　第二学年　児童用」（昭和 13 年 1938 年）35 頁 資料１

（国立国会図書館デジタルコレクション）※「ピタゴラスの定理」で検索
- 「中等教育新制数学教科書教授書　第３学年用」（昭和９年 1934 年） 資料２
- 長沢亀之助「算術・代数・幾何・三角模範解法並受験注意」（大正２年 1915 年） 資料３
- 菊池大麓「幾何学講義　第２巻」（明治 39 年 1906 年） 資料４

**【証明の考え方】**

**ステップ１**　４個の合同な直角三角形（**直角をはさむ２辺の長さ：** a、b、**斜辺の長さ：**c）を図１のように並べると、外側に一辺が a ＋ b の正方形と内側に一辺が c の正方形ができ，次式が成り立ちます。

（一辺が a ＋ b の正方形の面積）－（直角三角形の面積）× ４ [注１] ＝（一辺が c の正方形の面積）

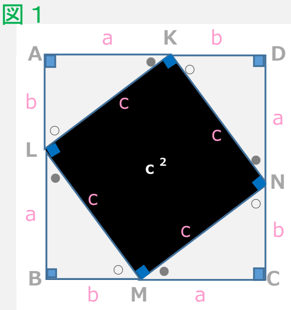
[注１] △AKL≡△BLM≡△CMN≡△DNK

$(a+b)^2-(ab/2)\times 4=c^2$ …①

**的外れ**かもしれませんが、

図１において、一辺が c の正方形の部分に**命中する確率**$=c^2/(a+b)^2$　（注）分母≠0

図１




脚注２参照 [2]

**ステップ２**　４個の合同な直角三角形（**直角をはさむ２辺の長さ：** a、b、**斜辺の長さ：**c）、一辺が a の正方形及び一辺が b の正方形を図２のように並べると、次式が成り立ちます。

（一辺が a ＋ b の正方形の面積）―（直角三角形の面積）× ４ [注２] ＝（一辺が a の正方形の面積）＋（一辺が b の正方形の面積）

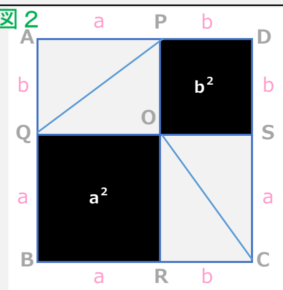
[注２] △APQ≡△OQP≡△ROC≡△SCO

$(a+b)^2-(ab/2)\times 4=a^2+b^2$ …②

**的外れ**かもしれませんが、

図２において、一辺が a の正方形の部分又は一辺が b の正方形の部分に**命中する確率**$=(a^2+b^2)/(a+b)^2$　（注）分母≠0

図２

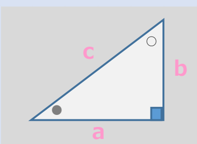



**①②より $a^2+b^2=c^2$ ⇒（$(a^2+b^2)$ と $c^2$ の面積は同じ）**

このことから、図１において、一辺が c の正方形の部分に**命中する確率**【$=c^2/(a+b)^2$】と図２において、一辺が a の正方形の部分又は一辺が b の正方形の部分に**命中する確率**【$=(a^2+b^2)/(a+b)^2$】は同じ。

---

1 **【参考】ピタゴラスの定理とは？**
直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a、 b、斜辺の長さを c とすると、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとするもの。



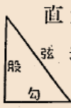

2 **【参考】①の式は、これを展開・整理すれば、$a^2+b^2=c^2$ が証明できます。証明の考え方は次のとおり。**

$(a+b)^2-(ab/2)\times 4=c^2$
$(a+b)^2-2ab=c^2$
$a^2+2ab+b^2-2ab=c^2$
$a^2+b^2=c^2$

資料１～資料４

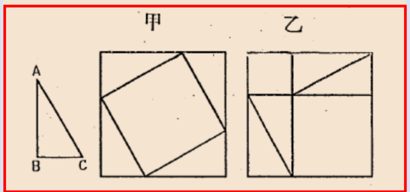
## 資料１「高等小学算術書 第二学年 児童用」

〔勾股弦ノ定理〕




直角三角形ノ直角ニ對スル邊ヲ**弦**,他ノ二邊ノ一ヲ**股**,他ヲ**勾**ト名ヅケル.

(1) 任意ノ直角三角形ヲカキ,コレト合同ノ三角形ヲ八箇,弦ノ長サヲ一邊トスル正方形ヲ一箇,股ノ長サヲ一邊トスル正方形ヲ一箇,勾ノ長サヲ一邊トスル正方形ヲ一箇カイテ,各ヲ切取リ,次ノ



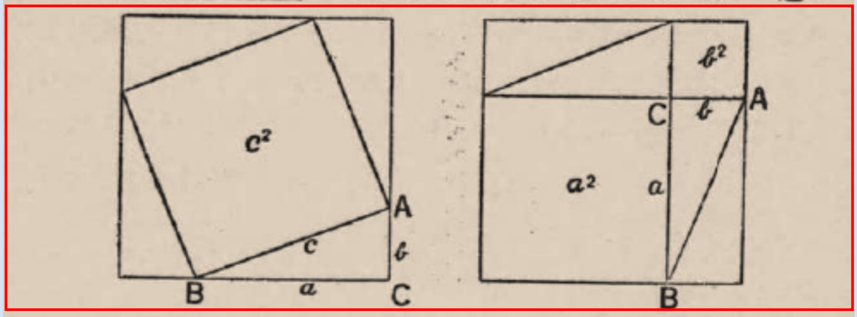

圖ノヤウニ並ベ,甲•乙ノ面積ヲ比べ,又勾ノ平方ト股ノ平方トノ和ト弦ノ平方トヲ比べヨ.

| |
|---|
| 弦ノ平方ハ勾ノ平方ト股ノ平方トノ和ニ等シイ. |

コレハ**勾股弦ノ定理**トイッテ,應用ノ廣イ重要ナ定理デアル.

## 資料２「中等教育新制数学教科書教授書 第３学年用」

又他ノ說ニピタゴラスハ直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ和ヲ一邊ト




スル正方形ヲ二ツ畫イテ上圖ノ如ク二通ノ分割ヲシテ左方デハ斜邊ノ上ノ正方形($c^2$)ト△$ABC$ ト等積ノ三角形ヲ四ツヲ得,右方デハ他ノ二邊ノ上ノ正方形($a^2$,$b^2$)ト△$ABC$ト等積ノ三角形四ツヲ得,依テ

$$a^2+b^2=c^2$$

トシテ證明シタトモ云ハレル. 國定教科書 (高等小學算術書第二學年用) ニハ此ノ方法ヲ採用シテアル.

**【一口メモ】** ピタゴラスの定理は、資料１のように**勾股弦【こうこげん】**の定理とも呼ばれ、直角三角形※の直角を挟む短い辺を**勾**（**【こう】**かぎの手の意）、長い辺を**股**（**【こ】**足の分かれめの意）、直角に対する辺（斜辺）を**弦**（**【げん】**弓のつるの意）というそうです。

※直角二等辺三角形の場合は、「短い辺」を「一つの辺」、「長い辺」を「他の辺」と読み替えます。

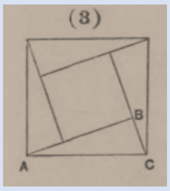
**【一口メモ】** 資料３では、子細に図を熟視すれば証明法を会得できると･･･、

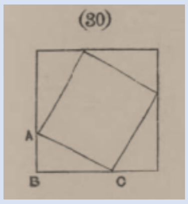
## 資料３「中等教育新制数学教科書教授書 第３学年用」

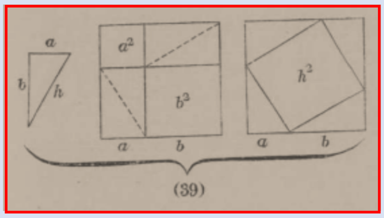
### ピタゴラスの定理に就きて

“直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ,他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ等シ” * ト云フ定理ヲ,次ノ39箇ノ圖ニ就キテ證明セヨ. 尤モ各圖ヲ仔細ニ熟視セバ,證明法ヲ會得スル如ク作圖シアリ.

* 此ノ定理ハ希臘ノ哲學家ぴたごらす [Pythagoras, 西暦紀元前約 580 年生, 約 500 年死] ノ發見ニ係ル, 或ハ云フぴたごらす氏ハ此ノ定理ヲ埃及ノ僧ニ聞キ, 而シテ其ノ證明ヲ發見セリト. 然レドモ氏ガ證明ハ果シテ如何ナルモノナリシカ傳ハラズ.




【注】（1）、（2）、（4）～（29）、（31）～（38）：略

**【参考】**

※（3）の証明の考え方

AB の長さ＝a、**BC の長さ＝b、AC の長さ＝c**

４個の合同な直角三角形△ABC の面積＋一辺が **(a-b) の正方形の面積＝一辺が c の正方形の面積**

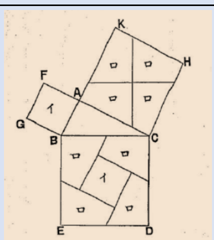
$ab/2 \times 4 + (a-b)^2 = c^2$

$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

※（30）、（39）の証明の考え方は、前掲のとおり

## 資料４「幾何学講義 第２巻」

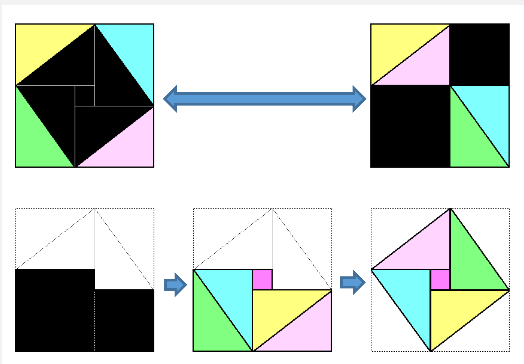



※視覚的に美しいと思いますが、あえて図のみ紹介します。

**【雑感１】**

半世紀ほど前に学習したはず（？）のピタゴラスの定理も・・・・・・「（統計と縁のある）確率は面積である」を意識すると、新鮮な感じがしました。

ちなみに、現時点の筆者の脳内のイメージは、右の図のとおりです。



【あとがき】
　ピタゴラスの定理の証明に、直角三角形の斜辺以外の 2 辺が作る二つの正方形を分割して斜辺と作る正方形に重ね合わせる方法があります[3]。今回、勾股弦（こうこげん）に関する資料を調べる過程で「勘者御伽双紙」（かんじゃおとぎぞうし）に出会いました。その中で「裁ち合せ物の事」の一節に勾股弦に係る記述がありましたので、ここに紹介します。

「勘者御伽双紙」寛保 3（1743 年出版）とは？（国立国会図書館ＨＰ「勘者御伽双紙」の解題/抄録による）
　著者の中根法舳（中根彦循なかね げんじゅん）(1701-1761)は京都の和算家・暦学者。本書は、体系化された和算書ではなく、随所に挿し絵を入れた、数学遊戯を主としてまとめた算書。

■「勘者御伽双紙．第 1 冊」

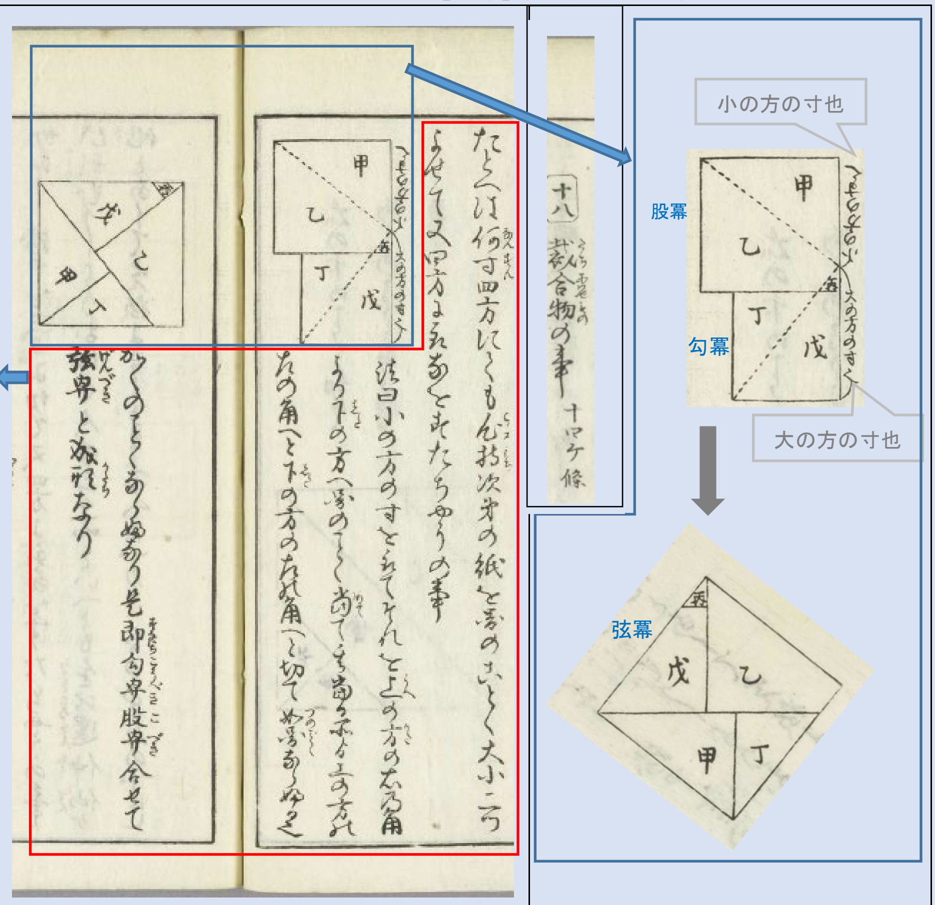
【画像】国立国会図書館デジタルコレクション

〔十八〕裁ち合せ物の事　十四ヶ條

たとへば何寸四方にても心持ち次第の紙を図のごとく大小二つよせて又四方に取なをす【取り直す】たちやう【裁ち合う】の事

法曰【いわく】小の方の寸を取てそれを上の方の右の角より下の方へ図のごとく当て其当る所より上の方の左の角へと下の方の左の角へと切て図の如くならぶる也【並べるなり】

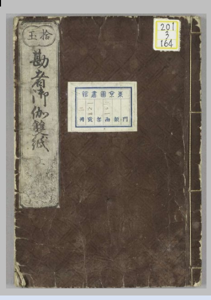
かくのごとくならぶるなり是【これ】即（すなわち）勾冪（こうべき）股冪（こべき）合せて弦冪（げんべき）と成【なる】形なり



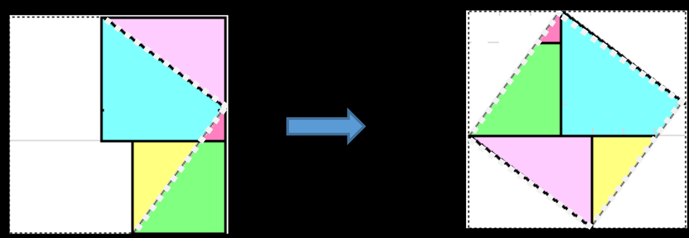

【要点】
右の図の点線の部分を切り取り、左の図のように並べかえると、直角をはさむ短いほうの辺（勾）の２乗と長いほうの辺の２乗をあわせると、斜辺（弦）の２乗と等しい。

※原文の勾冪（こうべき）、股冪（こべき）、弦冪（げんべき）の「冪（べき）」は、累乗の意味ですが、図の内容から２乗と理解しました。

（表紙）



【参考】



（筆者の脳内イメージ）

【一口メモ】ボヤイの定理（面積の等しい二つの多角形が存在したとき、一方を有限回分割し、組みなおすことで、他方と合同な図形を作ることが出来る）が示されたのは 1833 年で、前掲の「勘者御伽双紙」の出版年は寛保 3 年（1743 年）。江戸時代に、裁ち合せの考え方があったことは、大変興味深いです。[4]

【雑感２】
　冒頭で、正方形から合同な４つの直角三角形を切り取る方法について紹介し、最後に、切り取って並べ直す裁ち合せの方法を紹介しましたが、いずれも「確率は面積である」（確率は面積で表すことができる）を実感することができました。ただ、本稿で、モンテカルロ法（広辞苑によると「確率的な現象を利用して各種の数値計算を行い、問題の解や法則性などを得る方法。コンピューターによるシミュレーション手法の一つ。統計実験。」）に一切言及しなかったことで･･･的外れなコラムになってしまったことを反省しています。

---

[3]【参考資料】国立国会図書館ＨＰ「江戸の数学」
[4]【参考】「勘者御伽双紙」のほか、松宮観山（1686-1780）（北條流の兵学者）「分度余術 3 巻．第 6 冊」（出版年不明、国立国会図書館デジタルコレクションで閲覧可能）において、裁ち合せの例として、一辺 5 寸の正方形が、4 寸と 3 寸の正方形になる図を用いて、三刀三裁之法を紹介しています。