統計図書館コラム【雑学編】号外

（統計史料でみる昭和・平成期【その３】＋令和期　附録３）

2022 年を振り返ったら素因数分解プラスアルファに

奥積雅彦（総務省統計研究研修所教官）

【2022 年の出来事】

2022 年を振り返ると、ロシアのウクライナ侵攻、その影響などによる物価上昇、円安、安倍元総理銃撃事件、エリザベス女王の死去、ＦＩＦＡワールドカップ・カタールなどが想起されます。

国家の統治とは何か、国際社会における最適な行動や安全保障のジレンマ（ロシアのウクライナ侵攻はＮＡＴＯとロシアの双方に安全保障のジレンマをもたらすことに･･･）、国を背負うことについて考えさせられる１年だったと思います。

【2022 年の〆】

それでも、2022 年の〆は素因数分解と考え、トライしてみようとしましたが、2022 という数字についての素因数分解については、既に、統計図書館コラム【雑学編】号外（統計史料でみる昭和・平成期【その３】＋令和期　附録２）で紹介したとおりです（⇒2022=2×3×337）。

なので、来年度（2023 年 4 月～2024 年 3 月）の西暦についての素因数分解をトライしてみました。

2023 の素因数分解

2023 は、45^2＝2025 であることから$\sqrt{2023}$以下の素数(43 以下の素数)で割り切れるか小さい素数から順にみると、素数 2,3,5 で割り切れないが、素数 7 で割り切れ、商は 289。289 は、$\sqrt{289}$以下の素数で割り切れるか小さい素数から順にみると、素数 2,3,5,7,11,13 で割り切れないが、17 で割り切れ、商は 17。(あるいは、インド式計算を想起して、$289=149+140=10^2+7^2+2\times7\times10=(10+7)^2=17^2$)

よって、$2023=7\times289=7\times17^2$

2024 の素因数分解

・解法 1

偶数の桁の和と奇数の桁の和との差が 11 の倍数又は 0 であれば、その数は 11 の倍数[参考]であるので、2024 は 11 の倍数。⇒$2024=11\times184=11\times8\times23=2^3\times11\times23$

よって、$2024=2^3\times11\times23$

・解法 2

2024 は目視から $2^2\times506=2^3\times253$

偶数の桁の和と奇数の桁の和との差が 11 の倍数又は 0 であれば、その数は 11 の倍数であるので、253 は 11 の倍数。⇒$253=11\times23$（あるいは、$253=220+33=11\times(20+3)=11\times23$）

よって、$2024=2^3\times253=2^3\times11\times23$

・解法 3

2024 を和と差の積の形に因数分解できないかみてみました。

$45^2=2025\rightarrow2025-2024=1\rightarrow2024=2025-1=45^2-1^2=(45+1)(45-1)=46\times44=23\times2\times4\times11$

よって、$2024=2^3\times11\times23$

ちなみに、西暦 2022 年 は皇紀 2682 年なので、2682 を素因数分解してみました。

2682 の素因数分解

2682 は、偶数なので 2682＝2×1341。1341 は各桁の合計（＝9）が 3 の倍数なので 1341＝3×447。447 は各桁の合計（＝15）が 3 の倍数なので 447＝3×149。149 は、$\sqrt{149}$以下の素数(2,3,5,7,11)で割り切れないことから素数。よって、$2682=2\times3^2\times149$　（⇒皇紀は来春の統計図書館コラムの伏線?！）

【ゲーム理論】

ところで、筆者が大学生の肩書きもあったときの刑事訴訟法の試験は「公平な裁判所について論ぜよ。」という問題でした。刑事訴訟法自体は、全く興味がわかなかったのですが、なぜか「公平な裁判所」の用語だけが筆者の脆弱なＣＰＵにインプットされ、常駐することになりました。

その後、筆者は、「公平な裁判所」という用語とのご縁が全くないまま公務員生活を送ってきました。最近、統計図書館コラムで統計を理解するための基礎数学で、ネタ探しをしているとき、動画サイトでゲーム理論に出会い、まず、囚人のジレンマが登場しました。なぜか、新鮮な感じがして、薄い入門書を数冊購入。そのなかで、次に読むべき入門書も紹介されており、マイペースで学習することにしました。そして、その考え方は冒頭の安全保障のジレンマにつながるものでした。

【囚人のジレンマ】

囚人のジレンマについては、我が国の司法取引を連想し、検察官は不起訴処分や求刑に係る権限を付与されていますが、不起訴処分（証拠不十分のケース、起訴猶予のケース）となっても検察審査会で不起訴不当になる可能性もあり、また、検察官の求刑よりも重い判決がなされる可能性もあり得るなど、保護法益との関係で、求刑や起訴・不起訴で、自白内容が証左されないかぎり公平性は担保されるのかについて

気にすれば気になるところがあると感じていたところ。そんな中で「公平な裁判所」のことを思い出し、憲法第 37 条で刑事被告人に保証された権利との関係でどうなのか･･･とか、横道に逸れてしまいました。しかし、そこらへんは、バーチャルの世界と割り切って、まずはゲーム理論の考え方の基礎を理解することが優先されると考え、入門書の読書を続けました。公平性は無視して単純化されたモデルで考えるといった前提である旨の説明をする動画サイトもあり、楽しく入門書を読むことができました。

参考　囚人のジレンマ（筆者が理解しやすいようにアレンジ・脚色した脳内の利得表のイメージ）

		容疑者B	
		黙秘	自白
容疑者A	黙秘	【−1，−1】	【−5，0】
	自白	【0，−5】	【−3、−3】

凡例

【Aの処分、Bの処分】

−n：懲役n年（求刑）、0：不起訴

●A、Bがともに黙秘した場合

⇒A、Bともに懲役１年を求刑

●一方が黙秘で他方が自白した場合

⇒黙秘した方は懲役５年を求刑、自白した方は不起訴

●A、Bがともに自白した場合

⇒A、Bともに懲役３年を求刑

条件：AとBは協力できない⇒その条件下で相手の行動を予測して、どれを選択するか･･･？

【Aがとる戦略（最適反応）】

（条件）Bが黙秘⇒Aは黙秘すると懲役１年＞Aは自白すると不起訴⇒Aは自白したとき利得が最大化

（条件）Bが自白⇒Aは黙秘すると懲役５年＞Aは自白すると懲役３年⇒Aは自白したとき利得が最大化

【Bがとる戦略（最適反応）】

（条件）Aが黙秘⇒Bは黙秘すると懲役１年＞Bは自白すると不起訴⇒Bは自白したとき利得が最大化

（条件）Aが自白⇒Bは黙秘すると懲役５年＞Bは自白すると懲役３年⇒Bは自白したとき利得が最大化

■A．Bともに最適反応となるのは、A、Bがともに自白した場合

⇒ナッシュ均衡：A．Bともに最適反応となる状態（ゲームの解＝行き着く先）

⇒A．Bともに黙秘の方が得なのに、双方協力できない状況では、双方自白を選択（双方が損する⇒ジレンマ）

【効果】⇒検察官は自白を容疑者A，B双方の自白に誘導

【実社会の問題とゲーム理論･･･】

そして、囚人のジレンマ、利得、ナッシュ均衡とだんだん上っ面を理解できたような気がし、さらに、パレード改善、パレード最適に出会うことができました。

囚人のジレンマは、バーチャルの世界を前提とした話（理論の話）なのですが･･････、我が国の司法取引では、死刑又は無期の自由刑に当たるものを除いた経済犯罪や薬物銃器犯罪を対象とすることが想定されているようです。

利得を考えるとき、何が利得なのか悩ましいところがあると感じました。自白して出所後、裏切り者として報復される損失（保護されるシステムがあれば別だが･･･）があるのではないか、あるいは黙秘して相当の刑に服したほうが、更正できる利得があるのではないかと考えてしまいました（別の利得表を設定する必要があるかもしれません･･･。）が、ひとまず、横に置いておくことにしました。

囚人のジレンマは、黙秘か自白かですが、安全保障のジレンマをはじめ、価格設定（例：価格据え置きか値下げか、値上げか価格据え置きかといった経営戦略）、サービス残業やいじめの問題、ミスマッチの問題など実社会でのさまざまな問題をゲーム理論で考えることができるそうです。

【雑感】

ゲーム理論の入り口をみた限りでは、相手の行動を予想しながら、自らの最適な行動について合理的に意思決定をするための考え方であり、奥が深そうなので、引き続き学習したいと思いました。人々の行動を踏まえた上での統計分析も有用な場合があると思いました。一方で、これまで、筆者の公務員生活において、実は、無意識のうちに、ゲーム理論でいう「しっぺ返し戦略」を目の当たりにしていたような気がします。そういえば、あのときがそうだったのかもしれない･･･思い当たる節が･･･。

【余談】

前掲のとおり $2023=7\times289=7\times17^2$ ですが、

今回の調べものの過程で、289 は、

$289=1^2+12^2+12^2$ のほか、

$289=17^2=(8+9)^2=8^2+9^2+2\times8\times9=8^2+9^2+16\times9=8^2+9^2+(4\times3)^2=8^2+9^2+12^2$

$289=17^2=8^2+(9^2+12^2)=8^2+15^2$

で表せることも分かりました。

【注】ピタゴラス数：$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組（a ,b ,c）

※8,15,17：原始ピタゴラス数（互いに素なピタゴラス数）の一例

※9,12,15：原始ピタゴラス数「3 ,4, 5」の３倍⇒原始ピタゴラス数の自然数倍のピタゴラス数の一例

式で表すと、$3^2+4^2=5^2$ ⇒ $(3\times3)^2+(3\times4)^2=(3\times5)^2$⇒$9^2+12^2=15^2$

【あとがき】
ピタゴラス数を眺めていると、当事者間には一定の距離感が必要で、越えてはならない一線（あるいは越えられない一線）があるかもしれない･･･といったことを想起しました。また、相手の行動を予想する場合、それを踏まえて自らの行動を判断する場合は、因数分解的な発想が必要なのかもしれないと思いました（たまたま、筆者の低性能な脳内のＣＰＵで起きたその場限りのエピソードに基づくものです。）。

【おまけ】素因数分解に関する問題
インターネットで公開されている素因数分解に関する問題（動画のサムネイル等）で、最近、新に出会ったものについて、筆者が理解しやすいようにアレンジ、脚色して解いてみましたので紹介します。

① 249,999 の素因数分解
$249{,}999=250{,}000-1=500^2-1^2=(500+1)(500-1)=501\times499=3\times167\times499$

499 は、$\sqrt{499}$以下の素数(2,3,5,7,11,13,17,19)で割り切れないことから素数
167 は、$\sqrt{167}$以下の素数(2,3,5,7,11)で割り切れないことから素数
よって、$249{,}999=3\times167\times499$

② 83,333 の素因数分解
①より、$249{,}999 = 3\times167\times499$
$= 3\times167\times(500-1)$
$= 3\times(83{,}500-167) = 3\times83{,}333$
よって、$83{,}333 = 167\times499$

あるいは、①より、$249{,}999=3\times167\times499$
両辺を 3 で割ると、
$249{,}999/3 = (3\times167\times499)/3$
よって、$83{,}333 = 167\times499$

③ 2001 の素因数分解
各桁の合計が 3 の倍数ならその数は 3 の倍数[参考]であるので、2001 は 3 の倍数。
$\Rightarrow 2001 = 3\times667$
667 は、$\sqrt{667}$以下の素数で割り切れるか順次みると、23(素数)で割り切れ、商は 29(素数)。
よって、$2001=3\times23\times29$

④ 5767 の素因数分解
5767 を和と差の積の形に因数分解できないかみてみる。
$75^2 = 5625\rightarrow5625-5767 = -142\rightarrow$手詰まり
$76^2 = 5776\rightarrow5776-5767=9\rightarrow5767 = 76^2-3^2=(76+3)(76-3) = 79\times73$
よって、$5767 = 79\times73$

【参考】

●偶数の桁の和と奇数の桁の和との差が 11 の倍数又は 0 であれば、その数は 11 の倍数（４桁の数の場合）

４桁目～１桁目の数を a_4、a_3、a_2、a_1 とすると４桁の数は次式のように変形可能。
４桁の数　$N = 1000a_4+100a_3+10a_2+a_1$
$= (1001a_4-a_4) + (99a_3+a_3) + (11a_2-a_2) + a_1$
$= 1001a_4 +99a_3 + 11a_2 -a_4 + a_3 + -a_2 + a_1$
$= 11(91a_4+9a_3 + a_2) - (a_4-a_3 + a_2-a_1)$

$\Rightarrow 11(91a_4+9a_3 + a_2)$が 11 の倍数なので、
偶数の桁の和と奇数の桁の和との差 $(a_4-a_3 + a_2-a_1)$が)11 の倍数であれば、Ｎは 11 の倍数

●各桁の合計が 3 の倍数ならその数は 3 の倍数（４桁の数の場合）

４桁目～１桁目の数を a_4、a_3、a_2、a_1 とすると４桁の数は次式のように変形可能。
４桁の数　$N = 1000a_4+100a_3+10a_2+a_1$
$= 999a_4+99a_3+9a_2+a_4+a_3+a_2+a_1$
$= 3(333a_4+33a_3+3a_2) + a_4+a_3+a_2+a_1$

$\Rightarrow 3(333a_4+33a_3+3a_2)$は３の倍数なので、
各桁数の計 $a_4+a_3+a_2+a_1$ が３の倍数であれば、Ｎは３の倍数

【来年の抱負】
来年[2023 年]は、政表課誌と統計院誌の二つの統計史料について、人物に焦点をあてて精読し、素因数分解的なことを試みようと思います。