

## 季節調整法 TRAMO-SEATS 法の分析

高部 勲<sup>†</sup>

An Application of the TRAMO-SEATS Seasonal Adjustment Method  
- A Comparison Study of Seasonal Adjustment Methods between TRAMO-SEATS & X-12 -

TAKABE Isao

本稿ではスペイン銀行で開発された季節調整手法である TRAMO-SEATS 法の理論的な面を解説することを目的としており、また TRAMO-SEATS 法について批判的な角度から再検討を行い、適用に際して考慮すべき点を点検している。TRAMO-SEATS 法は、スペクトル解析に基づく Wiener-Kolmogorov フィルタをベースにした信号抽出手法であり、数理的に最適な季節調整結果を得ることができる。AMB 分解では、Canonical 分解を組み合わせることにより、トレンドや季節性に含まれるノイズを不規則変動に言わば“押し付ける”ことによって季節調整済み結果が滑らかになるようにしている。しかし TRAMO-SEATS 法では分析に当たって仮定される制約がやや強く、また恣意的な基準や合理的でないと考えられる部分もある。現在、様々な方面で、TRAMO-SEATS 法を含めた季節調整手法の可否についての比較検討が行われており、本稿はそのような検討に資するものと考えられる。なお本稿では EUROSTAT で開発された、TRAMO-SEATS 法が利用できる季節調整のフリーソフト“DEMETRA”の使用方法についても詳しく述べている。

キーワード：Wiener-Kolmogorov フィルタ、パワースペクトル、フーリエ変換、  
AMB 分解、Canonical 分解

This paper aims to describe the details of the seasonal adjustment method “TRAMO-SEATS”. In this paper TRAMO-SEATS method is reviewed in various aspects for implementation for time series. TRAMO-SEATS method is based on the concept of “signal extraction” using Wiener-Kolmogorov filter. The filter is an optimal solution for seasonal adjustment. TRAMO-SEATS method adopts AMB (ARIMA-Model Base) decomposition. AMB decomposition impose white noise fluctuations of signal series on noise series to smooth signal series, which method is called “Canonical decomposition”. Many papers indicate that the TRAMO-SEATS method is ad hoc, because of Canonical decomposition, its strong assumption and so on. This paper may contribute to review of various seasonal adjustment methods. In this paper, the seasonal adjustment software “DEMETRA” developed by EUROSTAT is also introduced.

Key Words: Wiener-Kolmogorov filter, Power Spectrum, Fourier Transformation,  
ARIMA-Model Based Decomposition, Canonical Decomposition

## はじめに

TRAMO-SEATS 法はスペイン銀行により開発された季節調整手法である (Gomez and Maravall (1996))。TRAMO-SEATS 法は Wiener-Kolmogorov フィルタをベースにした信号抽出 (Signal Extraction) の手法であり、主に欧州で利用されている季節調整の手法である。Wiener-Kolmogorov フィルタを用いることで、無限の過去から無限の未来まで観測値が存在すると想定した場合の最小二乗法によるデータ空間への射影として、数理的に最適な分解を行うことができる。TRAMO-SEATS 法では AMB 分解 (ARIMA-Model Based Decomposition) とキャノニカル分解 (Canonical Decomposition) を組み合わせることにより、トレンドや季節性に含まれるノイズを不規則変動に言わば“押し付ける”ことによって、時系列の各成分 (トレンド、季節成分など) が他の季節調整手法に比較して、より滑らかになることが指摘されている。現在、様々な方面で TRAMO-SEATS 法を含めた季節調整手法の適用の可否について比較検討が行われているようである。TRAMO-SEATS 法では、分析に当たって仮定される制約がやや強く、また恣意的な部分や合理的でないと考えられる部分もある。本稿では TRAMO-SEATS 法を用いた分析を手軽に行うことができるように、その理論的な側面を丁寧に解説することを目的としている。また TRAMO-SEATS 法について批判的な角度から再検討を行い、適用に当たった問題点を洗い出し、使用に際して考慮すべき点を点検している。さらに人工的に作成したデータに対して、TRAMO-SEATS 法と X-12 ARIMA 法を適用し、結果を比較している。今後の同様の分析に資する資料を提供するために、TRAMO-SEATS 法が利用できるフリーのソフトウェアの使用方法についても詳しく述べている。紹介するソフトウェアは、EUROSTAT で開発された、“DEMETERA” (EUROSTAT (2002)) である。これは GUI (Graphical User Interface) が優れている、非常に扱いやすいソフトであり、簡単な操作で様々な季節調整分析を対話的に行うことができる。また TRAMO-SEATS 法のほかにも X-12 ARIMA 法も利用できて、それぞれの季節調整法を適用した結果の比較を手軽に行うことができる。

以下、本稿の構成について説明する。 章では、TRAMO-SEATS 法の概要について説明し、X-12 ARIMA 及び DECOMP との比較を行い、TRAMO-SEATS 法の特徴について分析する。 章では観測系列の事前調整を行う TRAMO パートの概要と、モデルの自動選択機能について述べる。ここでは TRAMO パートで行われる Reg-ARIMA モデルの推定についても解説する。 章では、時系列の分解を行う SEATS パートについて触れ、そこで行われている処理 (AMB 分解、Canonical 分解、Wiener-Kolmogorov フィルタによる季節変動の除去) について解説する。また TRAMO-SEATS 法の基本となる Wiener-Kolmogorov フィルタと、これを理解するのに必要なスペクトル解析の基礎についても解説している。 章では、人工的に作成したデータに対して、TRAMO-SEATS 法と X-12 ARIMA 法を適用し、その結果の類似点、利用に関する注意点等について検討を行う。最後に、これまでのまとめとともに TRAMO-SEATS の改善案を提示し、さらに今後の季節調整の展望について述べる。また、今後の同様の分析に資するために、参考として、EUROSTAT が開発したフリーの季節調整ソフトウェア DEMETERA の利用方法についても示している。

## TRAMO-SEATS の概要

この章では、TRAMO-SEATS の概要について述べる。TRAMO-SEATS の中で行われている計算ステップについて概観するとともに、他の季節調整の手法 (X-12 ARIMA、DECOMP) との比較を行い、TRAMO-SEATS のメリット、デメリットについて分析する。

## 1 X12-ARIMA と DECOMP の紹介

章は、既存の季節調整法と比較した場合の TRAMO-SEATS の特徴を解説することを目的としている。したがって、比較の対象となる様々な季節調整法を理解しておく必要がある。この節では、数多くの季節調整法の中でもよく知られている X-12 ARIMA と DECOMP について紹介する。

## (1) X12-ARIMA

移動平均ベースの季節調整法と Reg-ARIMA モデル (Regression-ARIMA model) を組み合わせ、(1)はずれ値や曜日効果などの事前調整機能、(2)時系列の端点で移動平均を行うための予測機能、の 2 つの機能を持たせた手法である (国友 (2004))。X12-ARIMA の計算の手続は、以下のように大きく 2 つのパートに分けることができる。

## Reg-ARIMA モデルによる事前調整パート

残差が ARIMA モデルに従う時系列回帰モデル (Reg-ARIMA モデル) により、曜日効果、はずれ値などの調整や、欠測値の処理を行う。また時系列の端点で移動平均が行えるように、ARIMA モデルによる予測値で時系列を前後に延長する。

## X-12 パート

移動平均により、時系列をトレンド、季節成分、不規則変動などの各成分に分解する。

X-12 における移動平均では、適用する観測時系列に関係なく、事前に決めたウエイトによる加重平均フィルタを適用していることになる。このようなフィルタのことをアドホックフィルタ (ad hoc filter) と呼ぶ。本稿で紹介する TRAMO-SEATS も加重平均によるフィルタが用いられているものの、X12 のようなアドホックフィルタと異なり、観測時系列に応じて推定される最適なウエイトを用いた加重平均による最適フィルタが用いられている点が異なる。

## (2) DECOMP

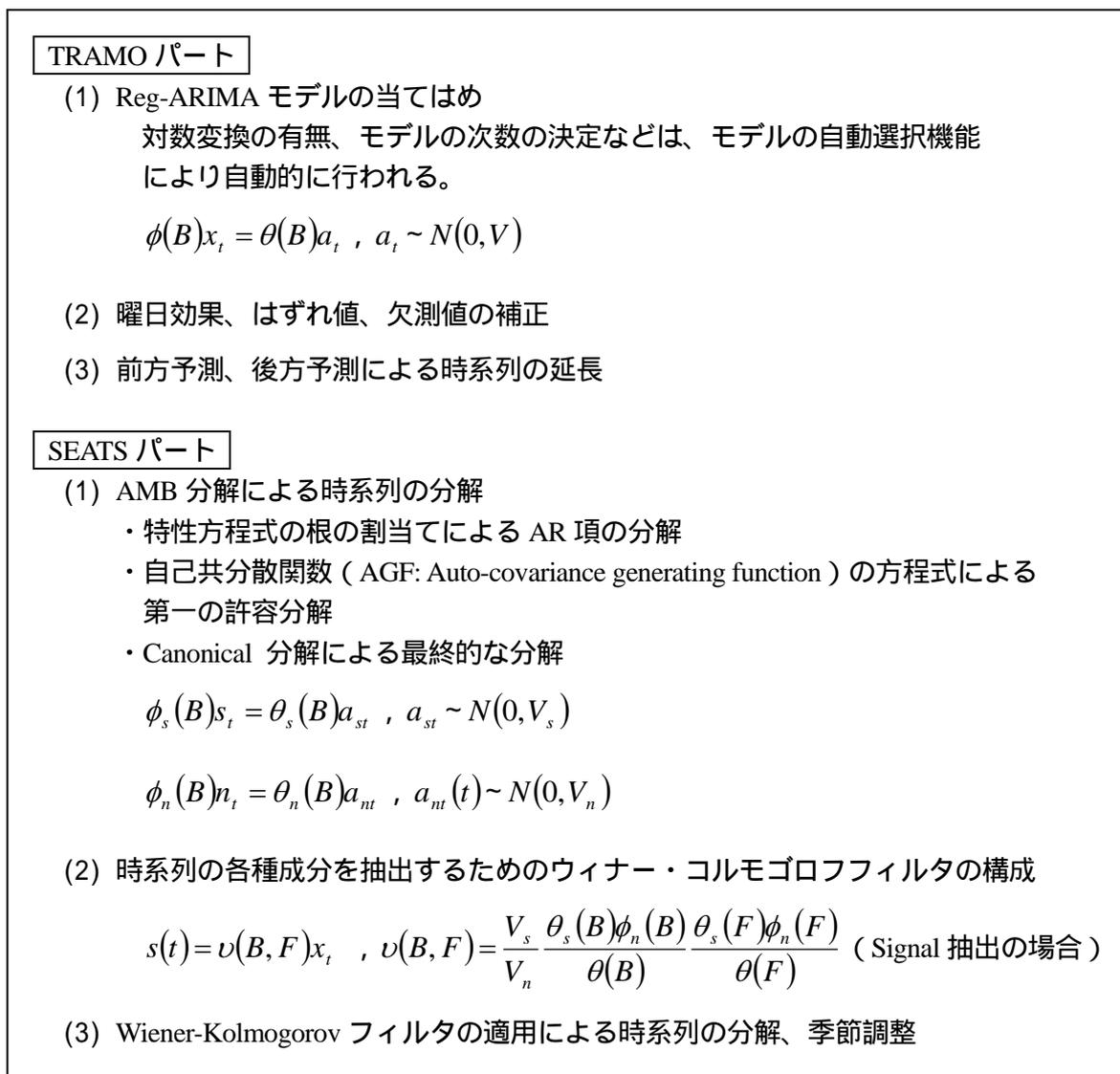
DECOMP は、状態空間モデル (State Space Model) 及びカルマンフィルタ (Kalman Filter) を用いて観測値をトレンド、季節成分、定常 AR 成分、不規則変動に分解し、季節性を取り除く手法である。DECOMP では季節成分等の動きをモデルで明確に表現しており、このような手法は Explicit な季節調整と呼ばれる。これに対して前述の X-12 ではトレンド、季節成分などの動きに特段の仮定を設けておらず、このような手法は Implicit な季節調整と呼ばれる。DECOMP は、推定値の平均二乗誤差を最小にするという意味で、数理的に最適な結果が得られる。各成分の次数の設定により様々なモデルが考えられるが、情報量基準 AIC により、これらのモデルを比較し、最適なものを選択することができる (北川 (1997))。

## 2 TRAMO-SEATS の構造

TRAMO-SEATS は、スペイン銀行の Maravall らによって開発された季節調整プログラムである (Maravall (1996))。TRAMO-SEATS のプログラムは、事前調整を行う TRAMO (Time Series

Regression with Arima noise, Missing Observation and Outliers) パートと時系列の分解を行う SEATS ( Signal Extraction in Arima Time Series) パートの2つのパートに大きく分けられる。TRAMO パートでは曜日効果の推定、はずれ値や欠測値の補正などの事前調整のほか、前方予測及び後方予測 (forecast & back cast) による時系列の延長、後の SEATS パートで必要になる季節 ARIMA モデルの当てはめなどを行う。続く SEATS パートでは、TRAMO パートで当てはめた ARIMA モデルを基に、AMB 分解 ( Arima-Model Based Decomposition) とウィナー・コルモゴロフフィルタ (Wiener-Kolmogorov Filter: WK filter) により時系列の分解と季節調整を行う。この一連の流れを簡単にまとめたものが、以下の図1である。

図1 TRAMO-SEATS の構造



TRAMO パートと SEATS パートの関係は、X-12 ARIMA における Reg-ARIMA モデルによる事前調整パートと X-12 による移動平均パートとの関係に似ている。TRAMO パートの最大の特徴は、モデルの自動選択機能 ( Automatic Model Identification ) にある。X-12 ARIMA にもモデル選択機能は備わっているものの、探索的な方法であり、あまり洗練されていない。

SEATS パートの核となる AMB 分解では特殊な方程式体系を解く必要があるものの、未知数が方程式の個数より必ず多くなるので、解は無数に存在し、一意的に解くことができない。そ

ここで不規則変動の分散が最大であるという仮定を置いた Canonical 分解（正準分解）を用いることで、一意的な分解を得る。しかし Canonical 分解は数理的に正当化することはできず、やや恣意的な面が強いと言える。また、AMB 分解での根の割当ての際の閾値の設定についても、恣意性の入り込む余地がある。

Wiener-Kolmogorov フィルタは現時点を中心とする左右対称な中心化フィルタであり、X-12 の移動平均フィルタと本質的には同じものである。X-12 の移動平均はウエイトが観測値系列によらず事前に確定しているのに対して、Wiener-Kolmogorov フィルタは時系列に合わせて最適なフィルタを構成する。ただしフィルタの導出では無限観測値の仮定を置いており、この定式化は強すぎると考えられる。

### 3 TRAMO-SEATS と他の季節調整手法（X-12 ARIMA、DECOMP）との比較

この節では、TRAMO-SEATS を X-12 ARIMA、DECOMP の 2 つの季節調整法と比較することで、TRAMO-SEATS の特徴を明らかにする。

#### (1) 事前調整と時系列の観点からの、TRAMO-SEATS、X-12 ARIMA、DECOMP の比較

TRAMO-SEATS が、TRAMO パートと SEATS パートに大きく分けられることについては既に述べた。これはちょうど、X-12 ARIMA が事前調整パートと移動平均パート（X-12 パート）に分けられることと類似している。事前調整と時系列の分解の観点から TRAMO-SEATS、X-12 ARIMA、DECOMP の 3 種類の季節調整法を比較したものが以下の表 1 である。

表 1 TRAMO-SEATS、X-12 ARIMA、DECOMP の構造の比較

季節調整手法	TRAMO-SEATS	X-12 ARIMA	DECOMP
事前調整 （曜日効果、はずれ値 などの補正）	TRAMO パート	Reg-ARIMA による 事前調整パート	両者は同時に 行われる
時系列の分解	SEATS パート	X-12 （移動平均パート）	
Explicit or Implicit （model based method or not）	Explicit （model based method）	Implicit	Explicit （model based method）

ここで DECOMP は、曜日効果などの調整パートと時系列の分解パートが分離しておらず、両者は同時に行われるのが特徴である（したがって、“事前”ではなく“同時”調整である）。TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA の事前調整には共に Reg-ARIMA モデルが用いられており、両パートに本質的な違いは無い。それぞれの手法は、Implicit model と Explicit model の観点からも分類できる。TRAMO-SEATS と DECOMP は、モデルを明確に設定する Explicit model の考え方がベースとなっている。しかし DECOMP が確率差分方程式の形によるかなり明確な時系列モデルを用いるのに対して、TRAMO-SEATS では ARIMA モデルだけを仮定としており、モデルに課す条件は DECOMP より若干弱い。

#### (2) SEATS と DECOMP の比較

TRAMO-SEATS における時系列の分解パートである SEATS パートと DECOMP における分解の過程との違いを比較してみる。以下の表 2 を参照。

表2 SEATS と DECOMP の比較

季節調整手法	SEATS	DECOMP
対象とする領域	周波数領域 ( frequency domain )	時間領域 ( time domain )
対象とする時系列	定常時系列	定常時系列及び 非定常時系列
観測値の制限	無限観測値 ( $y_t : -\infty \leq t \leq \infty$ )	有限観測値 ( $y_t : 0 \leq t \leq T$ )
分解に用いるフィルタ	Wiener-Kolmogorov フィルタ	カルマンフィルタ

季節調整の手続は、季節変動に対応する特定の周波数成分を弱める働きをする点を考慮すると、表中の について、周波数領域を扱う TRAMO-SEATS の方が、直感的なイメージがつかみやすい。表中の 、 については、TRAMO-SEATS で仮定している定常時系列、無限観測値の条件が強すぎると考えられる。特に の無限観測値の条件については、過去から未来にかけて無限の観測値が得られる状況を想定しており、現実のデータが常に有限時間でしか観察されないことと矛盾する。実際の計算ではこのギャップを埋めるために、時系列の前方と後方でかなり長期間の予測が必要となる。非定常、有限観測値でも利用できるカルマンフィルタがあるので、Wiener-Kolmogorov フィルタを利用するメリットは少ない。

### (3) SEATS と X-12 の比較

最後に、SEATS と X-12 の違いを比較してみる。以下の表3を参照。

表3 SEATS と X-12 の比較

季節調整手法	SEATS	X-12
分解に用いるフィルタ	Wiener-Kolmogorov フィルタ ( 数理的に最適な中心化 フィルタ )	( 中心化 ) 移動平均フィルタ ( アドホックフィルタ )
尤度の計算	状態空間モデル及びカルマン フィルタ ( 平方根フィル タ ) に基づく方法	厳密な対数尤度に基づく 方法

表中の について、X-12 では事前に固定されたアドホックフィルタが用いられているのに対し、TRAMO-SEATS では分析する時系列に対応した最適なウエイトによるフィルタが用いられている。X-12 ARIMA には、事前に用意されたアドホックフィルタのメニューの範囲で最適なものを選ぶような自動選択機能を備えている。しかしその方法は探索的、発見的である。

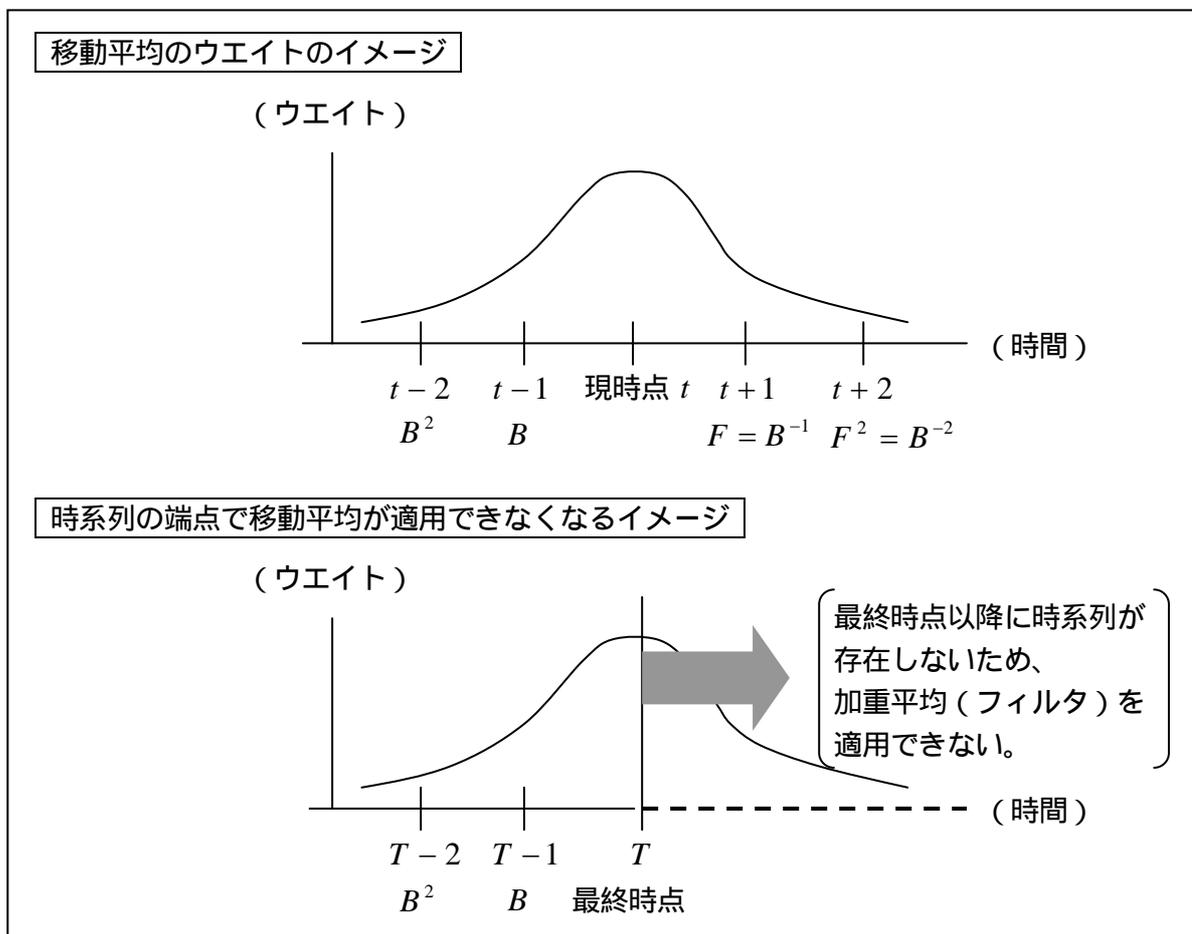
SEATS と X-12 のどちらの手法にも、中心化フィルタ ( Centralized Filter ) が用いられている。中心化フィルタとは、現時点を中心として過去と未来に伸びた、係数が対称な以下のようなフィルタを指す。

$$\nu(B, F) = w_0 + \sum w_k (B^k + F^k)$$

$$\left[ \begin{array}{l} B : \text{バックシフトオペレータ} ( Bx_t = x_{t-1} ) \\ F : \text{フォワードシフトオペレータ} ( Fx_t = B^{-1}x_t = x_{t+1} ) \\ w_i : \text{移動平均のウェイト} ( w_{-k} = w_k ) \end{array} \right]$$

中心化フィルタの適用を可能とするためには、各時点で前後にデータが存在している必要がある。このことは、SEATS と X-12 のどちらの手法においても、時系列の端点(始点  $t=0$  及び終点  $t=T$ )の付近では加重平均に必要なデータが確保できなくなること、したがって時系列の分解のためのフィルタが適用できなくなることを意味している(以下の図 2 を参照)。

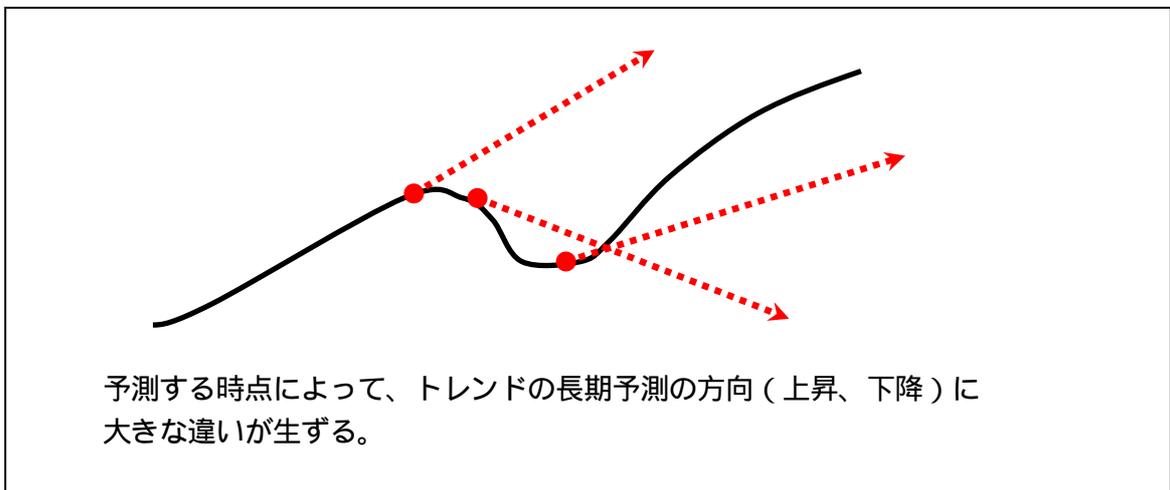
図 2 移動平均のイメージ



この問題に対してはどちらの手法も、時系列を Reg-ARIMA モデルで予測して前後に十分な期間だけ延長することで対処している。ただし TRAMO-SEATS では無限観測値を仮定しているので、原理的には前後に無限の期間だけ時系列を延長する必要がある。しかし現実的には途中で予測を打ち切って、近似計算を行っている。加重平均を行う時点から離れるにしたがってフィルタのウェイトが十分早く 0 に収束するのであれば、時点の離れた観測値の影響は小さいので、予測は短くて済む。しかし時系列によっては Wiener-Kolmogorov フィルタの

係数はなかなか収束しないこともあり、その場合には時系列を数年分程度、延長する必要がある。ARIMA モデルによる長期予測について、トレンドがはっきりとしていて長期の傾向が比較的予測しやすい時系列に対しては、問題ないと考えられる。しかし上昇と下降のトレンドが頻繁に入れ替わるような観測値系列の場合には、長期予測の誤差は非常に大きくなる可能性がある（図3を参照）。

図3 長期予測における予測時点と予測誤差の関係



4 TRAMO-SEATS の特徴

TRAMO-SEATS のメリットとデメリットについてまとめたものが以下の表4である。

表4 TRAMO-SEATS のメリットとデメリット

メリット	デメリット
<p>優れたモデルの自動選択機能が備わっている。</p> <p>時系列の特性に合わせて数理的に最適なフィルタを構成することができる。</p> <p>季節調整が周波数領域の作業として行われるので、季節周波数を弱める季節調整の作用がイメージしやすい。</p>	<p>AMB 分解における以下の2点について、恣意的であるとの批判がある。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Canonical 分解の手法が恣意的な分解であるとの批判がある。</li> <li>• AR 根の割当ての際の閾値<small>しきいち</small>の設定によって、分解の結果が変わってきてしまうおそれがある。</li> </ul> <p>「無限観測値」、「定常時系列」という2つの仮定が強すぎる。このため、時系列の端点におけるフィルタの不安定性や、新たな観測値に基づく改定の大きさが問題となる。</p> <p>Wiener-Kolmogorov フィルタを用いる必然性（根拠）が無い。カルマンフィルタを利用する方が、有限観測値という弱い仮定の下で、より最適な結果を得ることができる。</p>

上記の 3 点のデメリットはいずれも本質的なものであり、数値計算のテクニックなどで避けることはできない。TRAMO-SEATS を季節調整の手法として利用する場合には、メリットのみでなく、デメリットについてもよく考慮した上で用いる必要があると考えられる。TRAMO-SEATS では Canonical 分解を用いる部分が恣意的であると批判されることがある。Canonical 分解は、トレンド、季節性などが十分に滑らかであるという仮定を置いていることになり、これが適切か吟味する必要がある。TRAMO-SEATS は、用いられている手法が X12 に比べて分かりにくく、ブラックボックスとなりがちである。TRAMO-SEATS については手法の改善の余地がまだまだ残されていると考えることができる。このことについては最後のまとめにおいて、もう一度触れる。

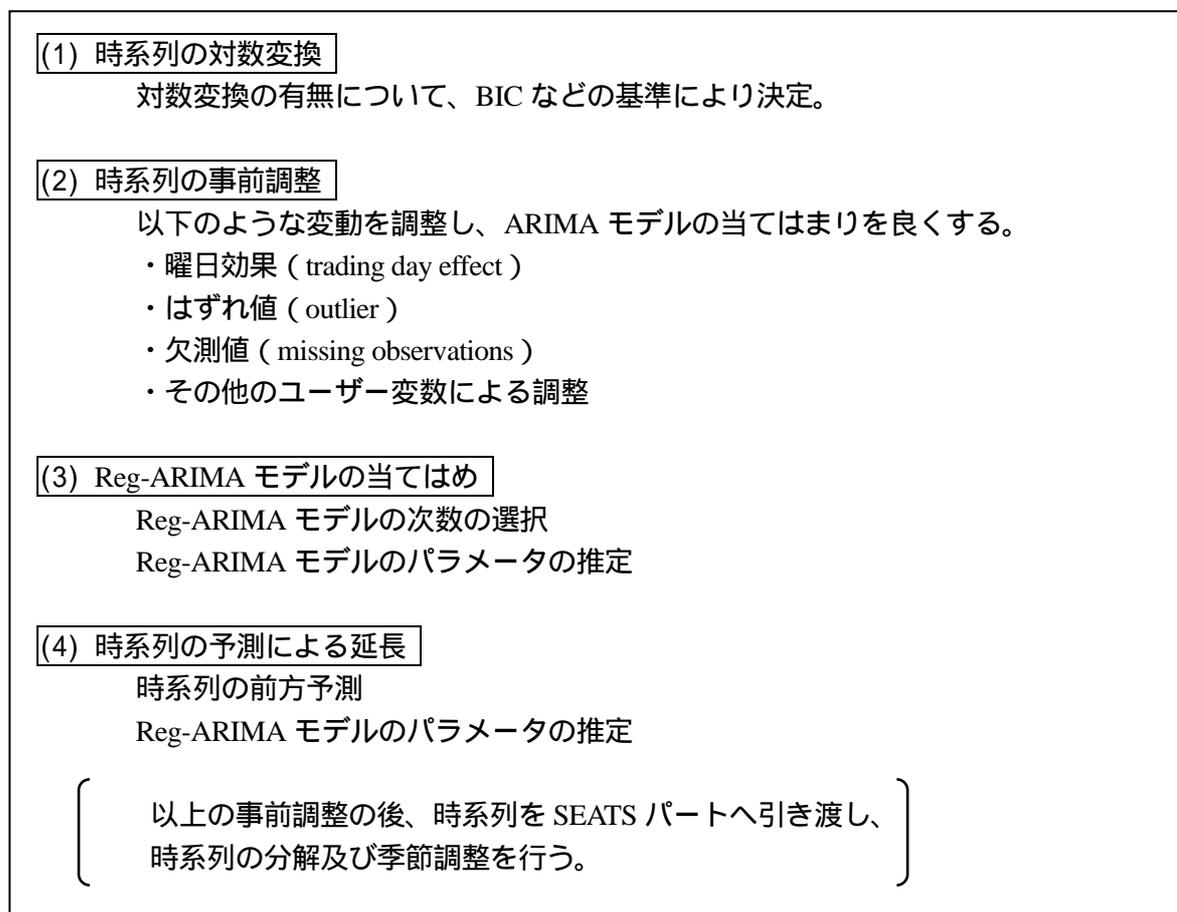
## TRAMO パートの概要

この章では、事前調整を行う TRAMO パートの概要について述べる。TRAMO パートにはモデルの自動選択機能が搭載されており、この機能についても詳しく述べる。

### 1 TRAMO パートの流れ

TRAMO パートにおける計算の流れについて、簡単に説明すると、以下の図 4 のようになる。この一連の流れは、モデルの自動選択機能として実行される。

図 4 TRAMO パートの流れ



以下では、図 4 中の(1)から(4)の各ステップについて説明する。Reg-ARIMA モデルの推定方法などの解説は後の節で行う。

(1) 時系列の対数変換

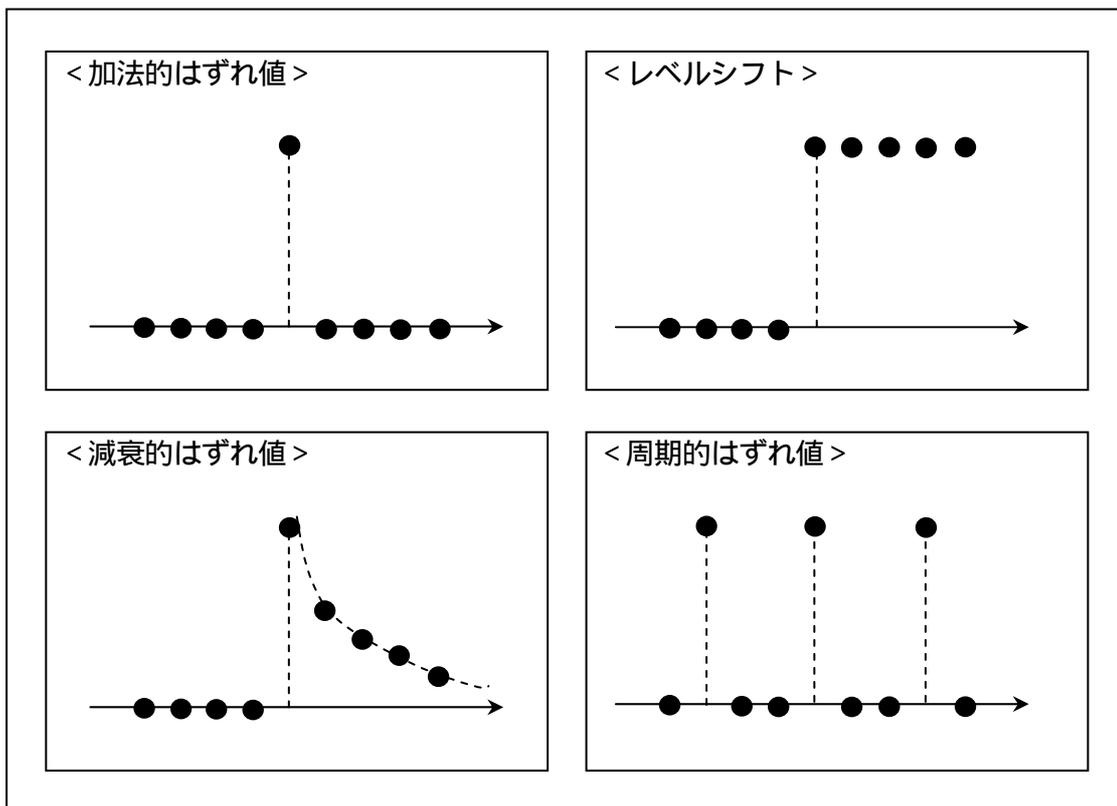
時系列によっては、対数変換を施した方が、時系列の動きが安定することがある。TRAMO では、対数変換の適用の有無について、シュワルツのベイズ情報量基準（BIC: Bayesian information criterion）を用いて判断している。

(2) 時系列の事前調整

- 曜日効果（trading day effect）
- 欠測値（missing observations）
- はずれ値（outlier）

のはずれ値については以下の図 5 のように様々なものがある。

図 5 様々なはずれ値の種類



ある時点でのみ影響を与える「加法的はずれ値」が、はずれ値の考え方としては最も馴染みやすい。ある時点で発生したはずれ値の影響が後にずっと残ってしまう場合に相当するのが「レベルシフト」であり、影響が時間とともに少しずつ減衰していく場合が「減衰的はずれ値」である。特定のインターバルで影響を与える「周期的はずれ値」についても、プログラムの中で用いることができる。このほか、ユーザーが自由に定義した説明変数も利用できる。

## (3) Reg-ARIMA モデルの当てはめ

はずれ値や曜日効果などを考慮した時系列回帰モデルは以下のようになる。

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i \lambda_i(B) D_{it} + \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i TD_{it} + \sum_{i=1}^{n_3} \beta_i REG_{it} + x_t$$

$y = \{y_t\}_{t=1}^T$  : 観測時系列

$x = \{x_t\}_{t=1}^T$  : 定常な ARIMA モデルに従う残差

$B$  : バックシフトオペレータ ( $Bx(t) = x(t-1)$ )

$\omega_i$  : ある時点におけるはずれ値の効果

$D_{it}$  : ダミー変数

$\lambda(B)$  : はずれ値の動きを表すバックシフトオペレータ  $B$  の多項式。これを調整することで、様々なはずれ値を表現できる。

$TD_{it}$  : 曜日効果。うるう年などの様々なカレンダー要因も含む。

$REG_{it}$  : その他、ユーザー定義を含む、様々な種類の説明変数を表す。

$\alpha_i, \beta_i$  : 曜日効果の係数及び各種説明変数の係数。

$n_1, n_2, n_3$  : 曜日効果、はずれ値などの個数。

上記のモデルは、より一般的な時系列回帰モデルの形で以下のように表現できる。

$$Y = \sum_{i=1}^m \beta_i X_i + Z$$

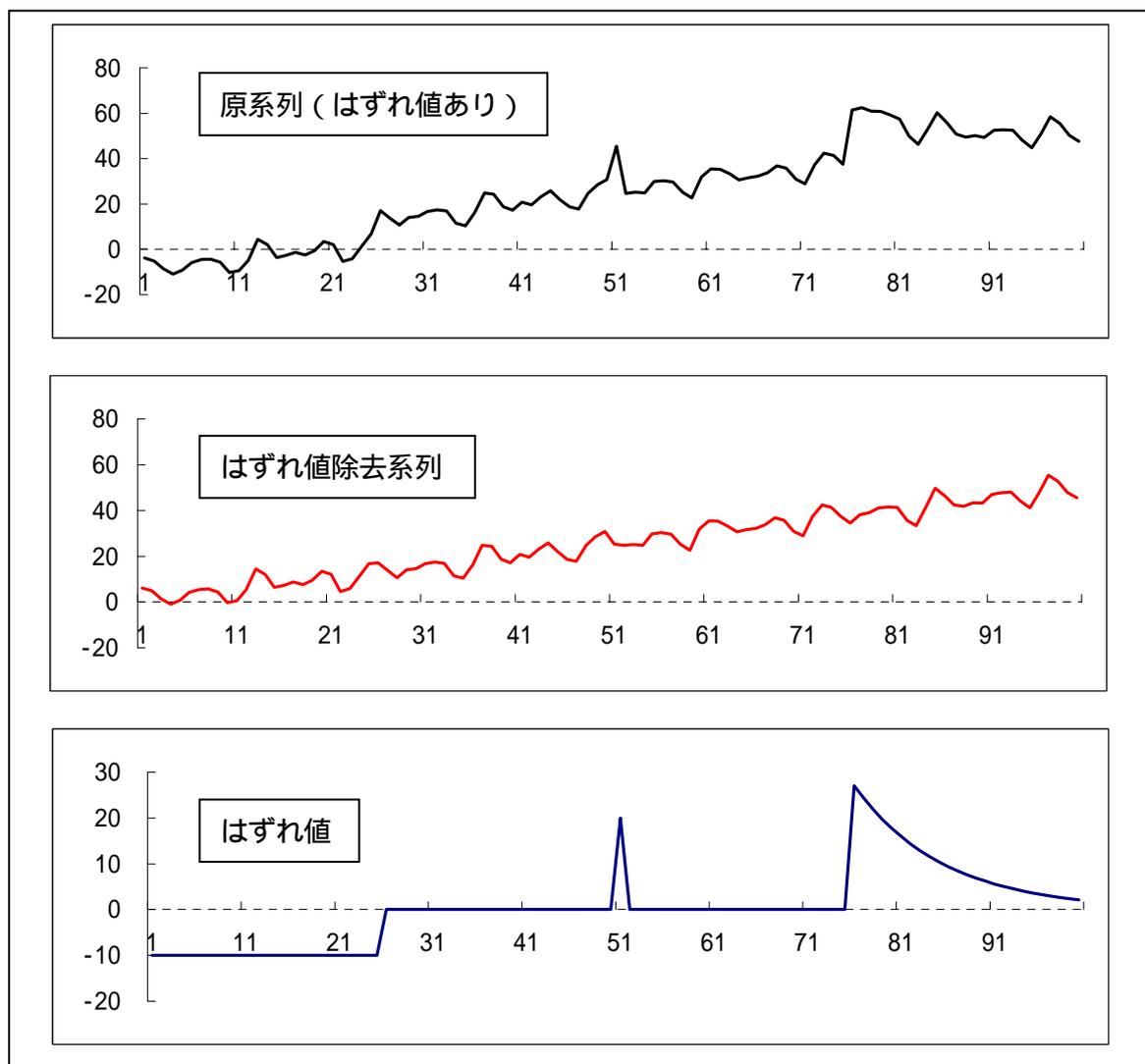
$Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)^T$  : 観測値の時系列

$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT})^T$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) : 説明変数

$Z = (z_1, z_2, \dots, z_T)^T$  : ARIMA モデルに従う残差

事前調整を行うことで時系列が安定する様子を示したものが、次ページの図 6 である。

図6 はずれ値の効果



最下段のグラフが、様々なはずれ値（レベルシフト、加法的はずれ値、減衰的是ずれ値）を表す。最上段が原系列であり、中段がはずれ値を取り除いた系列である。中段のグラフを見ると、はずれ値やレベルシフトの効果がうまく取り除かれ、時系列が安定することが分かる。

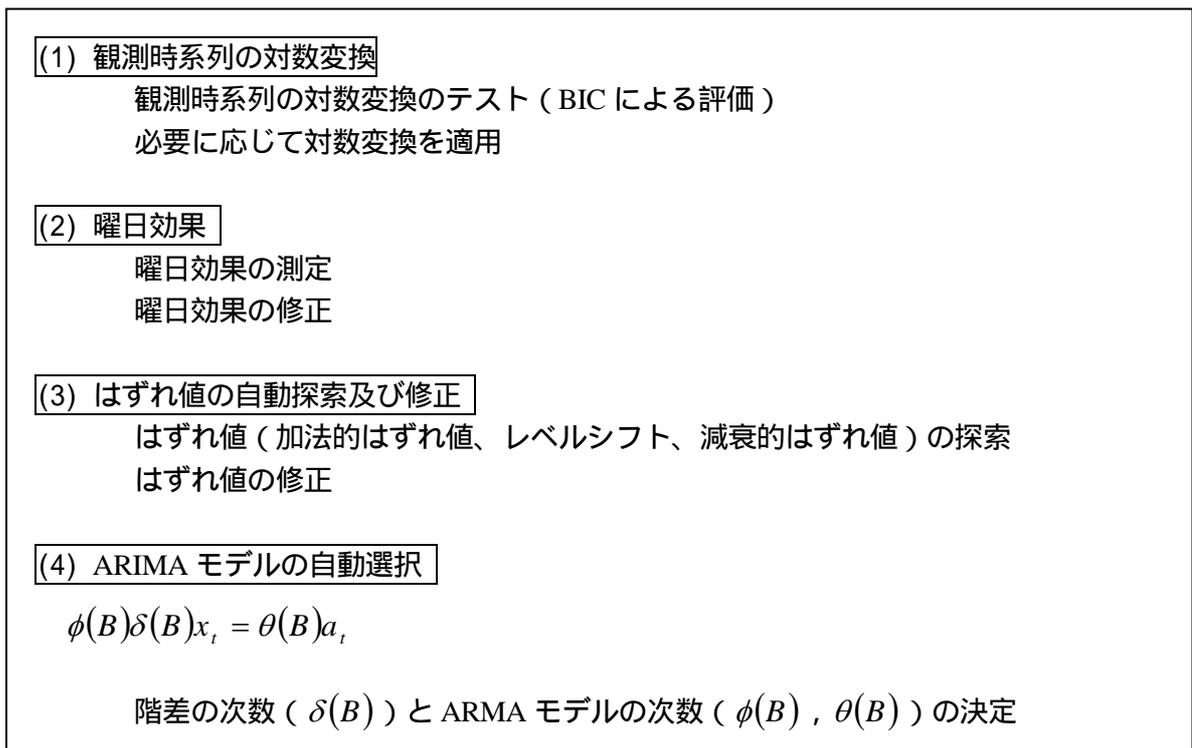
(4) 時系列の予測による延長

既に述べたように、Wiener-Kolmogorov フィルタは無限観測値を仮定している。そこで TRAMO パートで観測値系列に当てはめた ARIMA モデルを用いて予測値により時系列を前後に十分長く延長し、その上で Wiener-Kolmogorov フィルタを適用する。

2 モデルの自動選択機能の概要

ここでは、TRAMO パートで採用されているモデルの自動選択機能の概要について述べる。モデルの自動選択の流れを示したものが、次ページの図7である。

図 7 モデルの自動選択機能の流れ



上記の図 7 のプロセスは、推定の途中でモデルが変更されるたびに最初からやり直される。デフォルトの ARIMA モデルとしては、以下の Air line model が用いられている。

$$(1 - B)(1 - B^{12})x_t = (1 + \theta_1 B)(1 + \theta_{12} B^{12})a_t, \quad a_t \sim N(0, V)$$

以下の節で、Maravall, A (1996) を基に、図 7 の 4 つのステップの詳細について述べる。

(1) 観測時系列の対数変換

対数変換前と変換後の時系列に対して Air line model を当てはめて、それぞれのモデルの BIC を比較することにより、対数変換を施すべきか否かを決定する。

(2) 曜日効果

設定された ARIMA モデルによる Reg-ARIMA モデルを当てはめて、曜日効果が存在するかどうかを検証する。曜日効果の回帰モデルは、以下ようになる。このほか、平日と休日の 2 つの効果に分けるモデルもある (北川 (2005))。

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i X_{it} \quad (= \sum_{i=1}^6 (\beta_i - \bar{\beta})(X_{it} - X_{7t}) + \bar{\beta}m_t)$$

$$\left[ \begin{array}{l} X_{it} : \text{ある月における } i \text{ 番目の曜日の数} \quad (X_{7t} : \text{ある月における月曜日の数}) \\ \bar{\beta} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (\beta_i - \bar{\beta}), \quad m_t = \sum_{i=1}^7 X_{it} \end{array} \right]$$

(3) はずれ値の自動探索及び修正

以下の説明では、様々なはずれ値に対して次の記号を用いることとする。

$\omega_{AO}(T)$  : 加法的はずれ値 ( Additive Outlier )

$\omega_{LS}(T)$  : レベルシフト ( Level Shift )

$\omega_{TC}(T)$  : 減衰的是ずれ値 ( Temporary Shift )

はずれ値の出現する時点が特定できる場合 :

はずれ値が時点  $t = T$  で出現する場合、その時点で  $\omega_{AO}(T)$  ,  $\omega_{LS}(T)$  ,  $\omega_{TC}(T)$  を推定し、 $\lambda_T = \max \{ |\omega_{AO}(T)|, |\omega_{LS}(T)|, |\omega_{TC}(T)| \}$  を計算する。  $\lambda_T > C$  (  $C$  : 事前に定めた定数 ) であれば修正する。

はずれ値の出現する時点を特定することができない場合 :

すべての時点で の方法を試す。検出は1つずつ行われ、新たなはずれ値を検出するたびに、このプロセスは時点の最初からやり直される。  $\max(\lambda_T) < C$  (  $C$  : 事前に定めた定数 ) となれば終了。最後にそれらを以下の式で推定し直す。これは、以前に修正したはずれ値の影響が次のはずれ値の検出などに影響を及ぼす “ Masking effect ” をできる限り避けるための処置である。

$$z_t = z_t + \sum_{i=1}^T \omega_i v_i(B) I_{t_j}(t_j)$$

(4) ARIMA モデルの自動選択

ARIMA モデルの自動選択は、階差、AR 項、MA 項の次数の決定、パラメータの推定、の2つのステップから構成されている。以下ではそれぞれのステップの詳細について説明する。

階差、AR 項、MA 項の次数の決定

ARIMA モデルの同定では、階差、AR 項、MA 項の次数を適切に選択する必要がある。これらの選択には単位根検定 ( Unit Root Test ) が有効であるものの、膨大な量のモデルを検定する必要があることや、季節 MA 項が存在すると検出力が弱くなることなどが指摘されている ( Maravall, A ( 1996 ) )。そこで TRAMO では、AR 項や MA 項の根 ( Root ) が単位円にどの程度近い ( あらかじめ定めた ( 1 に近い ) 閾値 <sup>しきい値</sup> を AR 項や MA 項の根の modulus が超えているか ) を見るという経験的な方法により、これが単位根であるかを決定している。

ARIMA モデルの次数決定の流れについて説明する。まず以下の AR ( 2 ) 季節 AR ( 1 ) モデルを当てはめる。

$$(1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2)(1 + \phi_{12} B^{12})z_t = a_t, \quad a_t \sim N(0, V)$$

AR 項の根が 1 に近ければ、その因子は単純階差に回される。階差をとった後、再び AR モデルが当てはめられ、階差をとる必要性を見ていく。

こうして階差をとった後の時系列に対して、以下の AR(1,1) 季節 ARMA(1,1) モデルを当てはめる。

$$(1 + \phi B)(1 + \phi_{12} B^{12})(z_t - \mu) = (1 + \theta B)(1 + \theta_{12} B^{12})a_t, \quad a_t \sim N(0, V)$$

MA 項の根が単位円に近い場合には AR 項のパラメータの推定値がバイアスを持つので、上記の方法が採られている。以上のステップが繰り返され、単位根が 1 つずつ取り除かれる。閾値の設定が単位根の決定に影響を及ぼす可能性について調べておく必要がある。

#### パラメータの推定

ARIMA モデルは、必要な階差をとることで定常な ARMA モデルとなる。ARMA モデルの AR 項と MA 項の次数の選択には BIC が用いられる。ARMA モデルを当てはめた際の尤度を  $L$ 、データの総数を  $n$ 、推定すべきパラメータの総数を  $k$  としたとき、BIC は以下のように定義される。BIC が最も小さくなるモデルが最良のモデルである。

$$BIC = -2 \log(L) + k \log(n)$$

次数をあまり大きくしすぎると、AR 項と MA 項で共役な因子が出るといった問題が生ずる可能性がある(国友(2004))。通常の AR 項、MA 項の次数  $p, q$  と、季節 AR 項、MA 項の次数  $P, Q$  については、SEATS では以下のような範囲の制限がある。

$$0 \leq p, q \leq 3, \quad 0 \leq P, Q \leq 2$$

### 3 Reg-ARIMA モデルの概要と推定方法

SEATS パートで季節調整を行う際には、観測値系列に ARIMA モデルを当てはめる必要がある。しかしはずれ値の影響で観測値が ARIMA モデルに従わない場合もあり、事前にこれらの変動を取り除いておく必要がある。以下の記述は、Gomez and Maravall(1996)を基にしている。

#### (1) Reg-ARIMA モデルの概要

観測値の時系列  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)^T$  は、説明変数を  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT})^T$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) とする以下の時系列回帰モデルによって表現されると仮定する。

$$Y = \sum_{i=1}^m \beta_i X_i + Z$$

$\sum_{i=1}^m \beta_i X_i$  の部分は、はずれ値やレベルシフトなどの影響の大きさを表す。これらの変動を観測値  $Y$  から取り除いた残差  $Z = Y - \sum_{i=1}^m \beta_i X_i$  が以下の ARIMA モデルに従うと仮定する。

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^d z_t = \theta(B)\Theta(B^s)a_t$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{非季節 AR 作用素：} \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p \\ \text{季節 AR 作用素：} \Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_p B^{ps} \\ \text{非季節 MA 作用素：} \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_p B^p \\ \text{季節 MA 作用素：} \Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_p B^{ps} \\ a_t \sim N(0, \sigma_a^2) : \text{ホワイトノイズ} \end{array} \right]$$

ここで  $s$  は、年間の観測値の数を表し、月次系列であれば  $s=12$ 、四半期であれば  $s=4$  となる。この季節型 ARIMA モデルは、ARIMA (p, d, q) (P, D, Q) と表される。回帰モデルの説明変数は、デフォルトでは内部で自動的に設定されるようになっている。これについては分析者が事前に任意に与えることも可能である。設定できる説明変数の種類は以下のとおりである。

- a) ダミー変数 (ソフトに内蔵されている変数 (加法的はずれ値、レベルシフト等))
- b) 0, 1 の列による説明変数 (ユーザー定義変数)
- c)  $1/(1-\delta B)$  の形の減衰的はずれ値 (ただし  $\delta$  は、 $0 < \delta \leq 1$  を満たす変数)
- d)  $1/(1-\delta_s B^s)$  の形の減衰的はずれ値 ( " )
- e)  $1/(1-\delta B)(1-\delta_s B^s)$  の形の減衰的はずれ値 ( " )

$B$  の多項式を、階差部分  $\delta(B)$ 、AR 部分  $\phi(B)$ 、MA 部分  $\theta(B)$  にまとめると、次のように表現することができる。

$$\phi(B)\delta(B)z_t = \theta(B)a_t$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{通常階差：} \delta(B) = (1-B)^d(1-B)^p \\ \text{AR 項：} \phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_p B^{ps}) \\ \text{MA 項：} \theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_p B^p) (1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_p B^{ps}) \end{array} \right]$$

モデルには、階差をとる前の時系列の平均水準  $\mu$  が含まれている。実際の分析では、事前に階差をとった時系列  $\delta(B)z_t$  ( $t=1, 2, \dots, T$ ) に対して ARMA モデル (Auto-Regressive Moving Average model) を当てはめる。

モデルの中で推定すべき未知パラメータは、以下のとおりである。

ARIMA モデルの係数  $(\phi_1, \dots, \phi_p, \dots, \Phi_1, \dots, \Phi_p)$  と分散  $\sigma_a^2$

回帰モデルの係数  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$

モデルの自動選択機能以外にも、ユーザーが独自かつ外生的にモデルのパラメータを定めることも可能である。

## (2) Reg-ARIMA モデルのパラメータの推定手順

Reg-ARIMA モデルでは残差が時系列的な相関を持つため、その分散共分散構造も複雑になり、最小二乗法は利用できない。しかし残差の分散共分散構造が推定できれば、一般化最小二乗法によって回帰モデルの係数を推定できる。

ARIMA モデルのパラメータは、最尤法で求める。尤度関数は状態空間モデルとカルマンフィルタのアルゴリズムで効率的に推定することができる。Reg-ARIMA における回帰係数及び ARIMA モデルの係数などの未知パラメータは同時に決定される必要がある。TRAMO では以下の 2 つのステップ ( 、 ) を繰り返す繰り返し一般化最小二乗法 (IGLS: Iterated Generalized Least Square) により、これらのパラメータを推定している。

回帰モデルの係数  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  の推定

通常最小二乗法では、残差  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_T)$  の各要素の間に相関構造が無いことが仮定されている。しかし Reg-ARIMA モデルでは  $Z$  の成分同士が相関を持つため、通常最小二乗法を適用することはできない。このとき残差の分散共分散行列  $\Sigma$  が既知であれば、一般化最小二乗法 (GLS: Generalized Least Square) の公式  $\beta = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} Y$  により回帰モデルの係数を計算することができる。

ARIMA モデルのパラメータ  $(\phi_1, \dots, \phi_p, \dots, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \sigma_a^2)$  を所与の定数とすると、ARIMA モデルから定まる残差の時系列相関からその共分散構造  $\Sigma$  を推定することができる。上記の式では、次元の大きな行列の逆行列の計算が多く出てくるため、数値計算が不安定になるおそれがある。そこで推定はハウスホルダー変換 (Householder Transformation) による QR 法を経由して行われる。これは多くの統計解析ソフトウェアにおける最小二乗法の計算に導入されており、数値的に非常に安定した計算アルゴリズムである。ハウスホルダー変換による最小二乗法については、北川 (2005) を参照。

ARIMA モデルのパラメータ  $(\phi_1, \dots, \phi_p, \dots, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \sigma_a^2)$  の推定

Reg-ARIMA モデルの回帰モデル部分の係数  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  を所与とすると、

$z_i = Y - \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$  により残差  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_T)$  を求めることができる。残差を改めて

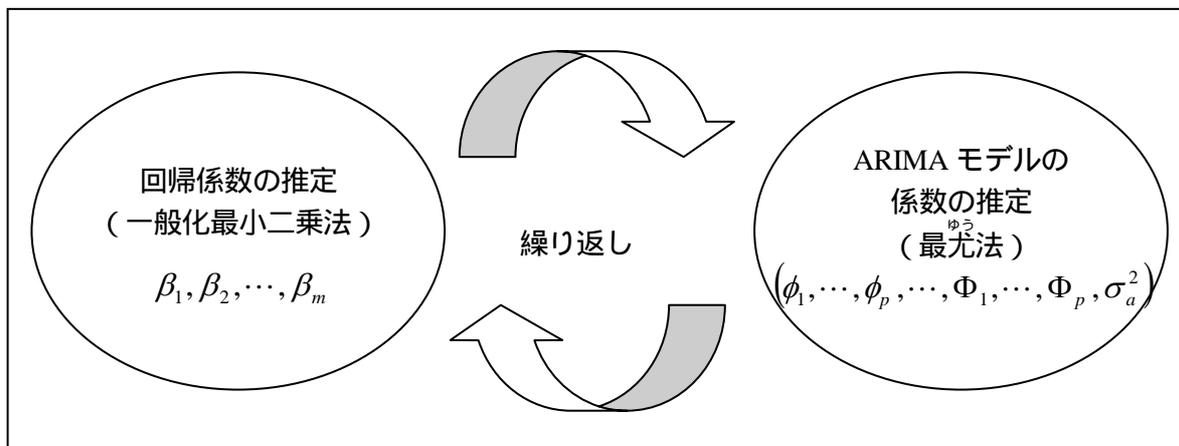
観測値系列とみなし、更に階差をとった時系列  $\delta(B)z_t$  に対して ARMA モデルを当てはめる。パラメータの推定には最尤法を用いる。ただし対数尤度関数は未知パラメータが複雑に絡み合った非線形の式であり、その最大値を与えるようなパラメータを解析的に求めることは困難であるため、数値計算による非線形最適化の方法により、未知パラメータの推定を行う。TRAMO では非線形最適化の際に、1次微分とマルカート法 (Marquardt's Method) による手法が用いられている。

カルマンフィルタの計算では、計算の過程で分散共分散行列の正値対称性が崩れる場合がある。これに対処するため、TRAMO のデフォルトの設定では計算に情報行列平方根フィルタ (Information Square Root Filter) が採用されている (北川 (1997))。情報行列平方根フィルタでは、分散共分散行列は平方根行列の二乗となり、必ず正値対象行列となる。なお TRAMO では、通常のカルマンフィルタを用いることもできる。しかし PC の容量がよほど小さくない限りは、デフォルトの情報行列平方根フィルタを用いることが賢明であろう。最適な ARMA モデルの次数は、BIC などの情報量基準により決定する。

繰り返し一般化最小二乗法 (IGLS: Iterated Generalized Least Square)

、 示したように、Reg-ARIMA モデルのパラメータは、回帰モデル部分と ARMA 部分のうち的一方を所与の定数として、他方の条件付推定値を求めることを収束するまで何度も繰り返すことで求める (下の図 8 参照)。

図 8 Reg-ARIMA モデルのパラメータの推定の概念図



Reg-ARIMA モデルの推定の際には、繰り返し一般化最小二乗法の収束やモデルの反転可能性などに関して注意すべき点が多くある。反転可能性が満たされない場合には、繰り返し計算が収束しない場合がある。また繰り返し計算が収束しても、推定された ARMA モデルの特性根の位置によってはモデルの定式化が誤っている場合もある。推定したモデルについては特性根の位置や AR 部分と MA 部分での既約可能性の有無などをチェックして、定式化が誤っていないかを常に診断する必要がある。Reg-ARIMA モデルの一般理論や定式化の際に気を付けるべきことなどについては、X-12 ARIMA のマニュアルの日本語訳である国友 (2004) を参照。

## SEATS パートの概要

本節では、時系列を分解するプログラム SEATS の解説を行う。SEATS における計算の流れについては、 章で述べたとおり、以下ようになる。

## (1) AMB 分解による時系列の分解

- ・特性方程式における AR 根の割当て
- ・AGF による方程式を解き、第一許容分解を得る
- ・Canonical 分解による最終的な分解

## (2) 時系列の各種成分を抽出するための Wiener-Kolmogorov フィルタの構成と適用

SEATS を理解するためには、周波数領域で時系列を解析する際に用いられるスペクトル解析の理論が必要なため、これについて簡単に解説する。そしてスペクトル解析の知識を基に、上記の (1)AMB 分解、(2)Wiener-Kolmogorov フィルタ、の各手法について解説する。

## 1 スペクトル解析と ARIMA モデル

ここではスペクトル解析の理論を簡単に紹介するとともに、ARIMA モデルとパワースペクトルとの関係について述べ、トレンド、季節性、循環変動、不規則変動などの要素がパワースペクトルを用いてどのように特徴付けられるかを説明する。パワースペクトルの導出など厳密な理論に関しては、日野 (1977) を参照。

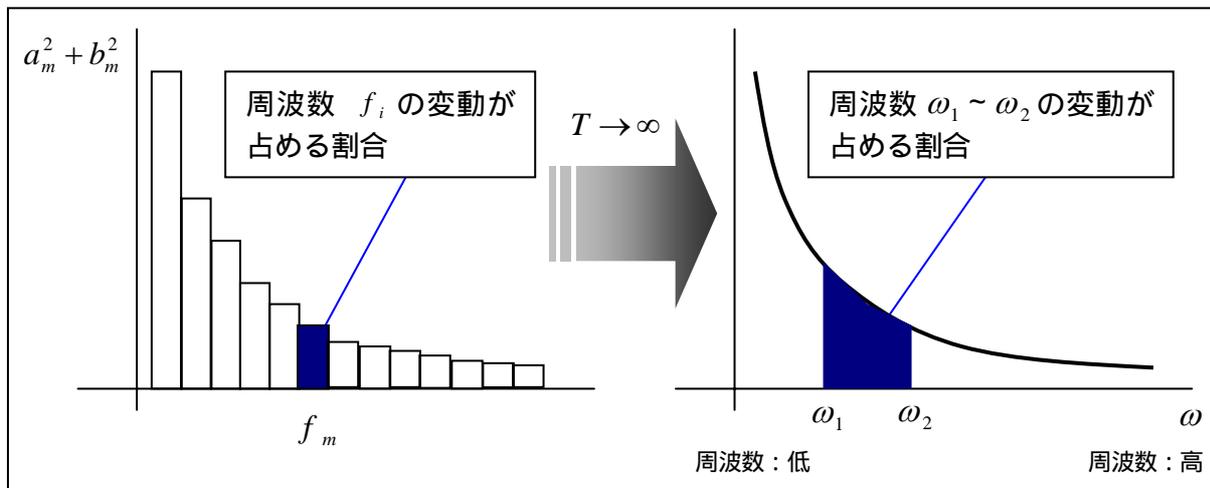
まず、時系列  $X(t)$  の周波数ごとのパワーを定義するため、 $X(t)$  のフーリエ変換を考える。

$$X(t) = a_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \right)$$

$$\begin{pmatrix} a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \\ b_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \end{pmatrix}$$

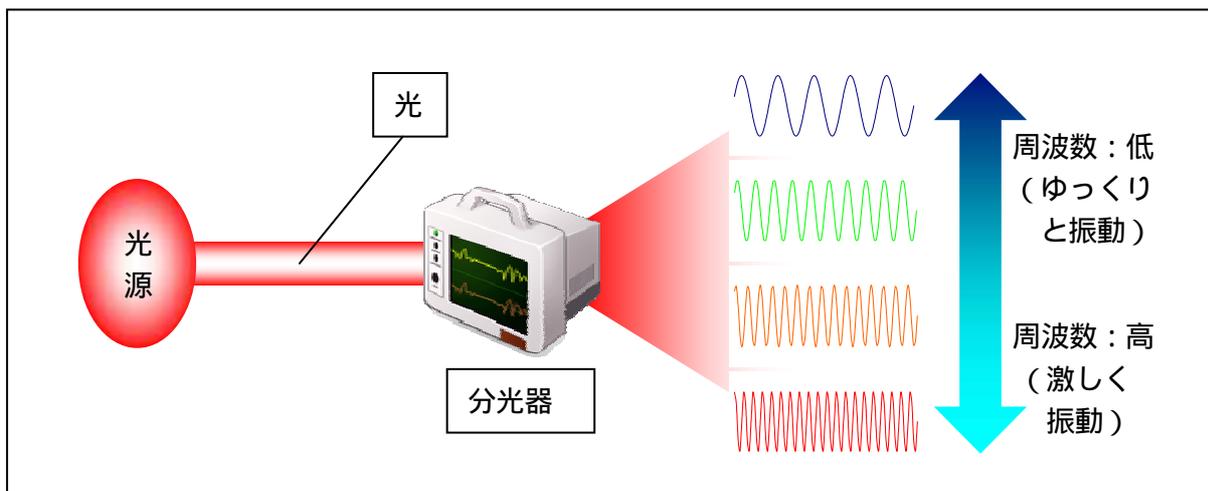
ここで  $f_m = \frac{2\pi m}{T}$  は周波数であり、それぞれの波が一定時間内にどの程度振動しているかを表している。周波数が大きいほど、一定期間内の振動回数が増える。したがって上下に頻繁に震動しているような波は周波数が大きくなり、トレンドなどの緩やかな変動は周波数が小さくなる。このとき、それぞれの波の振幅  $a_m^2 + b_m^2$  は、各周波数に対応する波が時系列  $X(t)$  全体の変動にどの程度寄与しているかを表す指標となる。ここで  $T \rightarrow \infty$  とすると、上記の和は積分となり、このときにも  $a_m^2 + b_m^2$  のように、ある一定の周波数の範囲にある波の成分が全体の変動にどの程度寄与しているかを調べるための指標を構成することができる。これがパワースペクトルである (以下の図 9 を参照)。

図 9



スペクトルの名前は、分光器（プリズム）を通して光を様々な色の成分に分けることに由来する。観測される時系列も様々な周期の波の合成であり、その中でどの波の成分の変動が大きいかを調べることによって、観測される時系列の特性を明らかにするのである（以下の図 10 参照）。

図 10



以下で、パワースペクトルの定義について述べる。まず時系列  $X(t)$  の自己共分散  $\gamma_k = \text{cov}(X(t), X(t-k))$  を用いて、AGF（自己共分散母関数: Auto-covariance Generating Function）を以下のように定義する。

$$\gamma(B, F) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j (B^j + F^j)$$

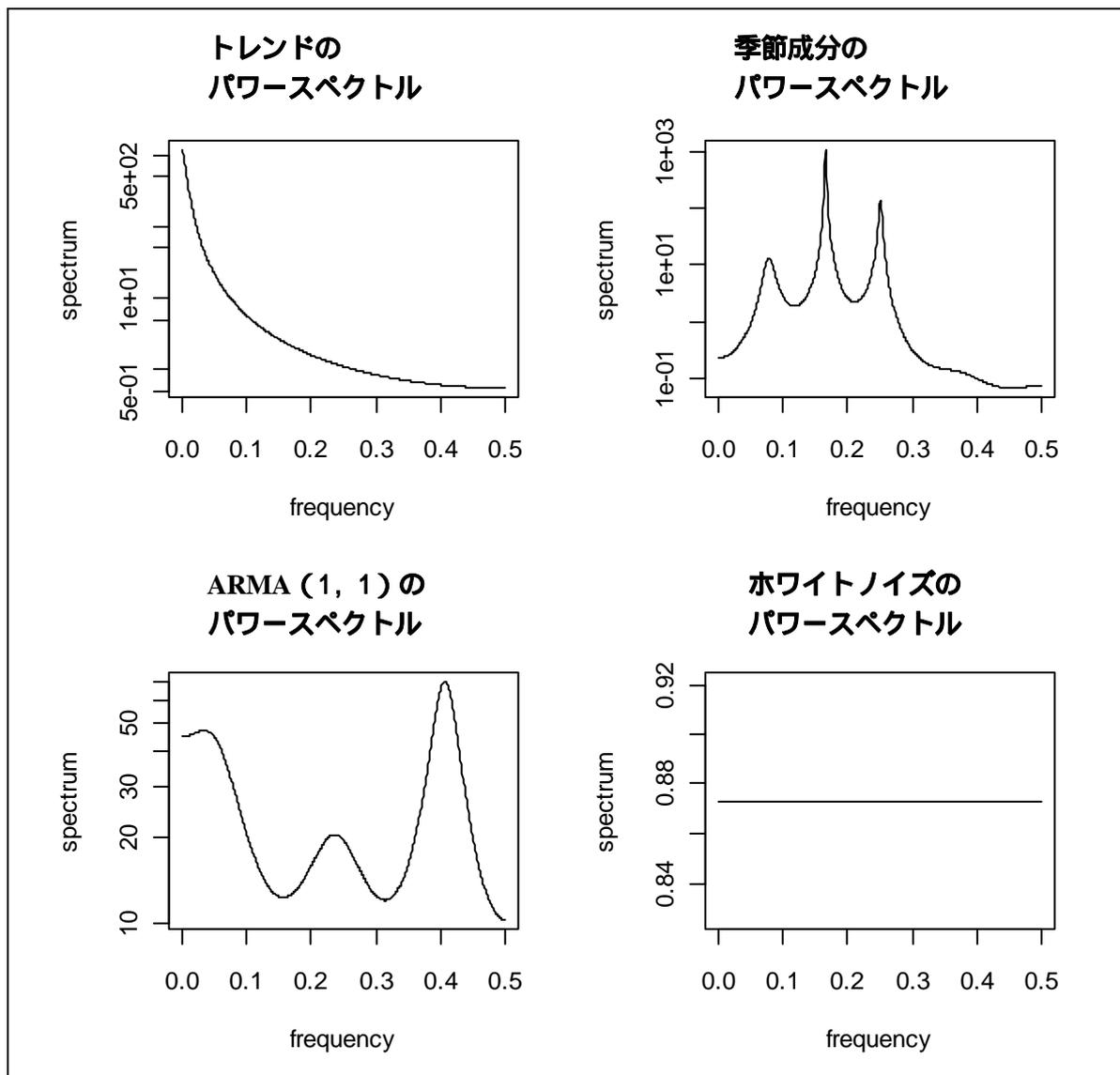
時系列  $X(t)$  のパワースペクトル  $g(\omega)$  は、上記の AGF をフーリエ変換 ( $B = e^{i\omega}$ ,  $F = e^{-i\omega}$  を代入してオイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ ) を用いて整理)

することにより、以下の形で定義される。

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega) \right]$$

このようにして定義されたパワースペクトルは、全体の変動に対する周波数ごとの成分の寄与を表す量となる。フリーの統計解析ソフトを用いて、トレンド、季節成分(周期が 1/12, 2/12, 3/12 である 3 つのサインカーブの和)、ARMA (1, 1)、ホワイトノイズのパワースペクトルを描いたものが、次の図 11 である。

図 11 各成分のパワースペクトルの例



ARMA モデルの AR 部分が反転可能であれば、全体を MA 過程に反転させることができる (Wald 表現:  $x_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$ )。なお TRAMO-SEATS における ARIMA モデルの推定では、反転可能性条件が必ず満たされるように、パラメータの推定が行われている。

MA モデル  $z_t = \psi(B)a_t$ ,  $a_t \sim N(0, V_a)$  の AGF は、 $\gamma(B, F) = \psi(B)\psi(F)V_a$  と書けることが分かっている (Planas (1997))。したがって、これまでの結果をまとめると、ARIMA モデルのパワースペクトルは次のように簡単に計算できる。

ARMA モデル  $\phi(B)x_t = \theta(B)a_t$  を反転し、 $x_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}a_t$  の形 (Wald 表現) へ変形。

$$\gamma(B, F) = \frac{\theta(B)\theta(F)}{\phi(B)\phi(F)}V_a : \text{AGF を計算。}$$

$$g(\omega) = \frac{\theta(e^{i\omega})\theta(e^{-i\omega})}{\phi(e^{i\omega})\phi(e^{-i\omega})}V_a : \text{ の AGF に } B = e^{i\omega}, F = e^{-i\omega} \text{ を代入して整理。}$$

## 2 AMB 分解 (ARIMA-Model Based Decomposition)

時系列が以下のように分解されると仮定する (月次データを想定)。

$$x(t) = m_t + n_t + c_t + u_t$$

$$\left[ \begin{array}{l} m_t : \text{トレンド...長期的な趨勢}^{\text{すう}} \text{を表す成分であり、緩やかに変動すると仮定される。} \\ (1-B)^d m_t = \theta_m(B)a_{mt}, a_{mt} \sim N(0, V_m) \quad (d \text{ は整数}) \\ n_t : \text{季節成分...一年を周期として変動する成分。} \\ (1+B+B^2+\dots+B^{11})n_t = \theta_n(B)a_{nt}, a_{nt} \sim N(0, V_n) \\ c_t : \text{トランジトリー成分...季節成分以外の様々な周波数成分を含む循環変動。} \\ (1+\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p)c_t = \theta_c(B)a_{ct}, a_{ct} \sim N(0, V_c) \\ u_t : \text{不規則変動...標本誤差や景気の一時的な変動などの変動を表す成分。} \\ u_t \sim N(0, V_u) \end{array} \right.$$

各成分は、以下の ARIMA モデルに従うと仮定する。

$$\phi_m(B)m_t = \theta_m(B)a_{mt} \quad a_{mt} \sim N(0, V_m)$$

$$\phi_n(B)n_t = \theta_n(B)a_{nt} \quad a_{nt} \sim N(0, V_n)$$

$$\phi_c(B)c_t = \theta_c(B)a_{ct} \quad a_{ct} \sim N(0, V_c)$$

$$u_t \sim N(0, V_u)$$

TRAMO パートで観測値系列に対して当てはめた ARIMA モデル  $\phi(B)\delta(B)x_t = \theta(B)a_t$  ,  $a_t \sim N(0, V_a)$  において、階差をとった後の ARMA モデルを考える ( $\delta(B)x_t = y_t$  とし、 $\phi(B)y_t = \theta(B)a_t$  を考える)。ARMA モデル  $\phi(B)y_t = \theta(B)a_t$  の AR 項  $\phi(B)$  は、以下の形に表現されていると仮定する。

$$\phi(B) = \Phi(B)\Phi_s(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D$$

$$\left[ \begin{array}{l} \Phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p : \text{レギュラーの AR 項} \\ \Phi_s(B^s) = 1 + \phi_s B^s : \text{季節 AR 項} \\ (1-B)^d : \text{レギュラーの階差項} \\ (1-B^s)^D : \text{季節階差項} \end{array} \right]$$

このモデルを分解可能とするために、以下の 3 つの条件を加える。

それぞれのモデルの中の確率変数  $a_{mt}$  ,  $a_{nt}$  ,  $a_{ct}$  ,  $u_t$  は独立である。

$\phi_m(B)$  ,  $\phi_n(B)$  ,  $\phi_c(B)$  ,  $\phi_u(B)$  は互いに素 (prime) である。

$\phi_i(B)$  ,  $\theta_i(B)$  ( $i = m, n, c$ ) は共通の単位根 (unit root) を持たない。

は信号と雑音それぞれ独立であることを表している。は信号と雑音では時系列の特徴が異なり、それぞれのスペクトルは異なる周波数でピークを持ち、トレンドや季節性が混ざり合っていないということを表す。はそれぞれのモデルの MA 過程への反転可能性を保障するための条件である。

次に AMB 分解について説明する。AMB 分解は大きく分けると以下の 3 つのステップからなる。

- (1) AR 部分の決定 (特性方程式の根の割当て)
- (2) AR 部分以外のパラメータの推定 (第一の許容分解)
- (3) ARMA モデルのパラメータの補正 (Canonical 分解)

以下では、この 3 つのステップそれぞれについて解説する。

(1) AR 部分の決定（特性方程式の根の割当て）

ここでの記述は東（2003）を参考にしている。TRAMO パートで観測値系列に当てはめた ARMA モデルの AR 項を因数分解し、特性方程式の根の位置に合わせて、それぞれの成分が従う ARIMA モデルの AR 項へ因子を割り振っていく。特性方程式の根が複素数の場合、対応する AR モデルは周期的な変動をする。さらに根が単位根であれば季節的な変動となる。実軸の正の位置にある単位根はトレンドとなる（以下の図 12 参照）。

図 12 ARIMA モデルの根の割当て

通常の階差  $(1 - B)^d$  :トレンド ( $\phi_m(B)$ ) に割り当てられる。

季節階差  $(1 - B^s)^D$  :

この項を因数分解すると、 $(1 - B^s)^D = (1 - B)^D (1 + B + B^2 + \dots + B^{s-1})^D$  となる。

ここで

)  $(1 - B)$  はトレンド ( $\phi_m(B)$ ) に割り当てられる。

)  $1 + B + B^2 + \dots + B^{s-1}$  は、季節成分 ( $\phi_n(B)$ ) に割り当てられる。

AR 項  $1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p$  :

特性方程式  $x^p + x^{p-1}\phi_1 + \dots + \phi_p = 0$  の根  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) によって、

$1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p = (1 + \alpha_1 B)(1 + \alpha_2 B) \dots (1 + \alpha_p B)$  と因数分解される。

各因子 ( $1 \leq i \leq p$ )  $(1 + \alpha_i B)$  をどこに割り当てるかについては、

特性根の位置によって以下のように場合分けする。

) 正の実根の場合

根の絶対値  $\geq k$  のとき、トレンド ( $\phi_m(B)$ ) に割り当てられる。

根の絶対値  $< k$  のとき、トランジトリー成分 ( $\phi_c(B)$ ) に割り当てられる。

) 負の実根の場合

根の絶対値  $\geq k$  のとき、季節成分 ( $\phi_n(B)$ ) に割り当てられる。

根の絶対値  $< k$  のとき、トランジトリー成分 ( $\phi_c(B)$ ) に割り当てられる。

) 複素根の場合・・・根の周波数を  $\omega$  と表記する。

$\omega$  [季節周波数  $\pm \delta$ ] のとき、季節成分 ( $\phi_n(B)$ ) に割り当てられる。

その他の場合は、トランジトリー成分 ( $\phi_c(B)$ ) に割り当てられる。

季節 AR 項  $\Phi_s(B^s) = 1 + \phi_s B^s$  : 特性方程式の根によって場合分けする。

$1 + \phi_s Z^s = 0$  の正の実根を  $\tilde{\phi}$  とする ( $\tilde{\phi} = \sqrt[s]{-\frac{1}{\phi}}$ )、このとき  $\Phi_s(B^s)$  は  $(1 - \tilde{\phi}B)(1 + \tilde{\phi}B + \tilde{\phi}^2 B^2 + \dots + \tilde{\phi}^{s-1} B^{s-1})$  のように因数分解することができる。

このとき、特性根  $\tilde{\phi}$  の大きさによって、以下のように割り当てる先を変える。

)  $\tilde{\phi} \geq k$  のとき :

$1 - \tilde{\phi}B$  がトレンド ( $\phi_m(B)$ ) に割り当てられる。

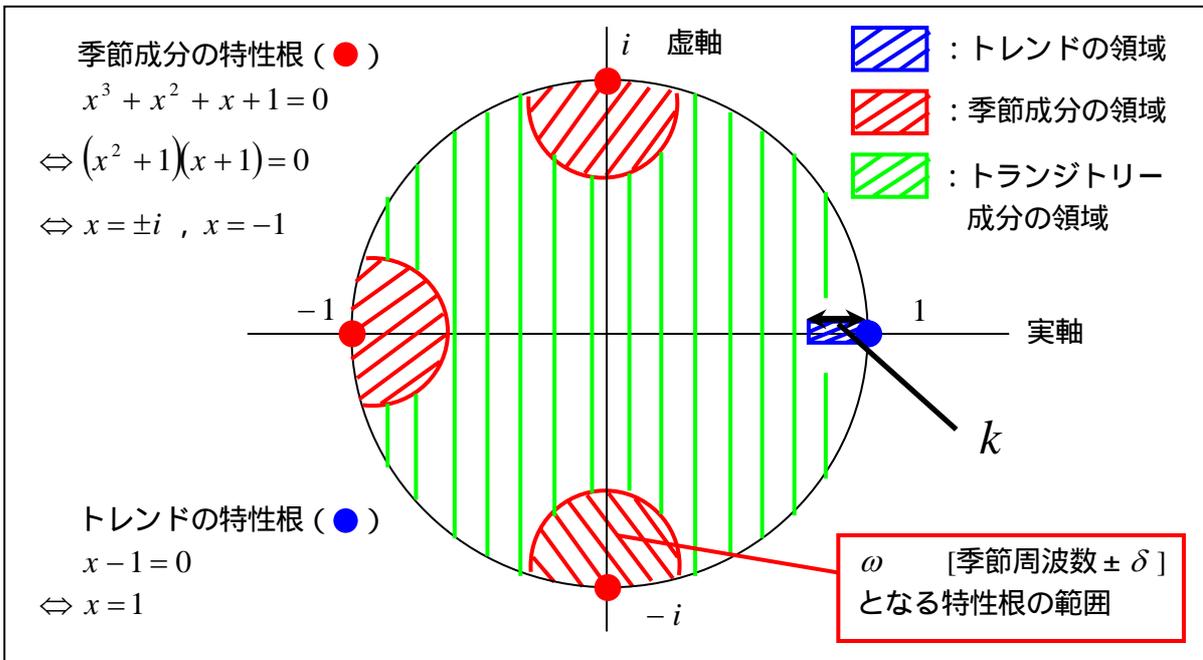
また  $1 + \tilde{\phi}B + \tilde{\phi}^2 B^2 + \dots + \tilde{\phi}^{s-1} B^{s-1}$  が季節成分 ( $\phi_n(B)$ ) に割り当てられる。

)  $\tilde{\phi} < k$  のとき :

$\Phi_s(B^s) (= 1 + \phi_s B^s)$  全体がトランジトリー成分 ( $\phi_c(B)$ ) に割り当てられる。

特性根の位置による時系列の変動の分類については、以下の図 13 を参照。

図 13 特性根の位置による時系列の変動の分類



なお図示を簡単にするために、時系列の周期を四半期とし、季節成分の因子を  $1 + B + B^2 + B^3$  に変更している。

TRAMO-SEATS では、上記の説明の中の  $k$  と  $\delta$  の値について、プログラムの中でユーザーが自由に設定できるようになっている。 $k$  と  $\delta$  の値がプログラムの中で果たす役割については、以下のとおりである。

$k$ ：差分の係数が 1 に近いかな否かを見るためのパラメータである。差分がトレンドかトランジトリー成分かを決定するために用いる。

$\delta$ ：AR 項の特性根が特定の季節周波数の近くにあるかな否かを見るためのパラメータである。差分が季節成分かトランジトリー成分かを決定するために用いる。

$k$  と  $\delta$  の値の合理的な決め方は特に無く、経験によって試行錯誤しながら決めていくしかない。特に  $1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p$  の特性根が単位円の付近にあるような場合には、この部分が季節成分となるかトランジトリー成分となるかについては、 $\delta$  の少しの違いで変わってくることがあり、その違いは季節調整の結果に当然ながら大きく影響する。したがってそのような場合には、 $k$  と  $\delta$  の値の設定の仕方自体が恣意的になるおそれがある。

## (2) AR 部分以外のパラメータの推定 (第 1 の許容分解)

前節で、AR 部分の分解について述べた。ここでは残りの未知パラメータ (MA 部分  $\theta_m(B)$ ,  $\theta_n(B)$ ,  $\theta_c(B)$  のパラメータと、3つの分散  $V_m, V_n, V_c$ ) の推定について説明する。パラメータの推定では、方程式の数より未知数が多い方程式体系を解く必要があり、その解は一意的に定まらない。ここで何らかの意味で一意的に解を決定する必要がある。分解は 2 段階で行われる。ここでは MA 項に適当な仮定を置いて、第 1 の許容分解を得るまでを説明する。

まず、以下の式が成立していることに注意する。

$$\phi(B) = \phi_m(B)\phi_n(B)\phi_c(B)$$

$$\phi_m(B)m_t = \theta_m(B)a_{mt}$$

$$\phi_n(B)n_t = \theta_n(B)a_{nt}$$

$$\phi_c(B)c_t = \theta_c(B)a_{ct}$$

これらの関係から、以下の式が導かれる。

$$\begin{aligned} \theta(B)a_t &= \phi_n(B)\phi_c(B)\theta_m(B)a_{mt} + \phi_m(B)\phi_c(B)\theta_n(B)a_{nt} \\ &\quad + \phi_m(B)\phi_n(B)\theta_c(B)a_{ct} + \phi_m(B)\phi_n(B)\phi_c(B)u_t \quad \dots \cdot ( ) \end{aligned}$$

式( )の左辺の MA 項  $\theta(B)$  の次数及びパラメータは、TRAMO による ARIMA モデルの当てはめの結果により決定している。また前節で説明した特性方程式による根の割当てから、式( )の右辺における AR 項 ( $\phi_m(B)$ ,  $\phi_n(B)$ ,  $\phi_c(B)$ ) の次数及びパラメータも決定している。しかし式( )の右辺の MA 項 ( $\theta_m(B)$ ,  $\theta_n(B)$ ,  $\theta_c(B)$ ) の次数及びパラメータはまだ決まっていない。ここで各成分の ARIMA モデルの AR 項と MA 項の次数が一致することを要請する。このようにして右辺の MA 項の次数を決めると、式( )の右辺各項の次数がすべて等しくなり (= 「 $\phi_m(B)$  の次数」 + 「 $\phi_n(B)$  の次数」 + 「 $\phi_c(B)$  の次数」)、それは右辺全体としての MA 項の次数とも等しくなる (和の定理)。すべての項の次数が決まった後で、前述の式の両辺で AGF を計算し、両辺を  $V_a$  で割ると、以下のような式ができる。

$$\theta(B)\theta(F)_a = \psi_m(B)\psi_m(F)\kappa_m + \psi_n(B)\psi_n(F)\kappa_n + \psi_c(B)\psi_c(F)\kappa_c + \psi_u(B)\psi_u(F)\kappa_u$$

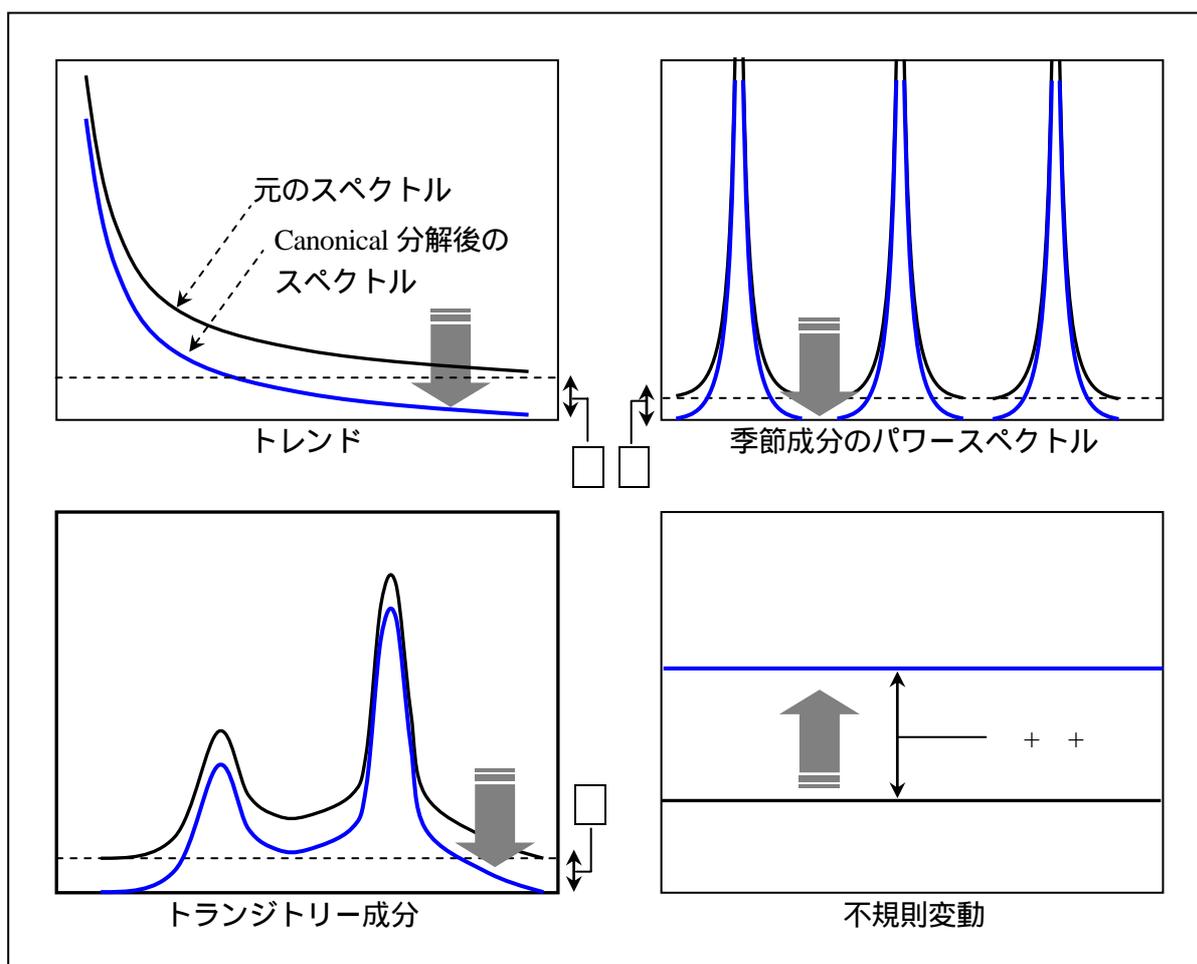
$$\left( \begin{array}{l} \psi_m(B) = \phi_n(B)\phi_c(B)\theta_m(B), \psi_n(B) = \phi_m(B)\phi_c(B)\theta_n(B) \\ \psi_c(B) = \phi_m(B)\phi_n(B)\theta_c(B), \psi_u(B) = \phi_m(B)\phi_n(B)\phi_c(B) \\ \kappa_m = V_m/V_a, \dots, \kappa_c = V_c/V_a, \kappa_u = V_u/V_a \end{array} \right)$$

上式は  $B$  と  $F$  の多項式となり、 $B^i + F^i$  の各項の係数を両辺で比較することで、未知数に関する方程式が  $\theta(B)$  の次数と同じ数だけ定まる。しかしこのとき未知数は  $\theta(B)$  の次数に加え、確率変数  $a_t, a_{st}, a_{nt}$  のそれぞれの分散である  $V_a, V_s, V_n$  の 3 つがあり、未知数が方程式の数よりも 3 つ多くなっている。このことから、上記の方程式体系を満たす分解は無数に存在することが分かり (過剰識別の問題)、解は一意的に定まらない。SEATS では、各成分の MA 部分について最高次の係数を 0 と置くことにより、未知数を方程式の数まで減らすことで、第一の許容分解を得ている (東 (2003))。

(3) ARMA モデルのパラメータの補正 (Canonical 分解)

SEATS では、第一の許容分解を足掛かりとしてこれを適当に修正することで、最終的な分解を得る。不規則変動以外の成分のパワースペクトルの最小値が 0 になるように平行移動し、その分だけ不規則変動のパワースペクトルを上へ平行移動させる。つまり観測値系列に含まれるノイズをすべて、不規則変動に押し付けてしまうのである。こうすれば、分解は一意的に定まる。これが Canonical 分解である (東 (2003))。Canonical 分解のイメージについては図 14 を参照。

図 14 Canonical 分解のイメージ図 (パワースペクトルの変化)



Canonical 分解を具体的に式で書くと、以下のようなになる。

$$g_m(\omega) = g_m^0(\omega) - \alpha \quad (\alpha = \min(g_m^0(\omega)))$$

$$g_n(\omega) = g_n^0(\omega) - \beta \quad (\beta = \min(g_n^0(\omega)))$$

$$g_c(\omega) = g_c^0(\omega) - \gamma \quad (\gamma = \min(g_c^0(\omega)))$$

$$g_u(\omega) = g_u^0(\omega) + \alpha + \beta + \gamma$$

$$\left[ \begin{array}{l} g_m^0(\omega), g_n^0(\omega), g_c^0(\omega), g_u^0(\omega) : \text{それぞれ } m, n, c, u \text{ のパワースペクトル} \\ g_i^0(\omega) = \frac{\theta_i^0(e^{j\omega}) \theta_i^0(e^{-j\omega})}{\phi_i^0(e^{j\omega}) \phi_i^0(e^{-j\omega})} V_a \quad (j = m, n, c) \\ g_u(\omega) \text{ (不規則変動) は定数} \end{array} \right]$$

こうして求められたスペクトルを逆フーリエ変換することで、最終的な時系列のモデルが得られる。逆フーリエ変換は、各成分のスペクトルに、 $e^{j\omega} = B$  ,  $e^{-j\omega} = F$  を代入して整理することで求められる。トレンド成分であれば、以下ようになる。

$$\frac{\theta_m^0(B) \theta_m^0(F)}{\phi_m^0(B) \phi_m^0(F)} V_a - \alpha = \frac{\theta_m^0(B) \theta_m^0(F) V_a - \phi_m^0(B) \phi_m^0(F) \alpha}{\phi_m^0(B) \phi_m^0(F)} \quad \text{より、}$$

$$\psi_m^0(B) m_t = \Theta_i^0 a_{mt}^0 \quad \text{となる。} \quad (a_{mt}^0 \sim N(0, V_i^0))$$

ただしここで  $\psi_m^0 = \phi_m^0(B) \phi_m^0(F)$  ,  $\Theta_m^0(B) = \theta_m^0(B) \theta_m^0(F) V_a - \phi_m^0(B) \phi_m^0(F) \alpha$  である。

### 3 Wiener-Kolmogorov フィルタ

Wiener-Kolmogorov フィルタは、通信工学における信号抽出 (Signal extraction) の考え方に基づくフィルタであり、時系列から雑音を取り除くための手法である。観測値系列と各成分の ARMA モデルのパラメータは、TRAMO と AMB 分解によって推定されているものとする (Canonical 分解が適用されていることを明確にするために、右上に 0 を付けている)

$$\psi_i^0(B) m_t = \Theta_i^0 a_{it}^0, \quad a_{it}^0 \sim N(0, V_i^0) \quad (i = m, n, c)$$

$$u_t^0 \sim N(0, V_u^0)$$

推定すべき系列の ARMA モデルが既に定まっている場合には、これを Wald 表現に直した上で AGF を作り、観測値の AGF との比をとることで、最適なフィルタが得られる。これが Wiener-Kolmogorov フィルタである。以下ではトレンドを例にとり、Wiener-Kolmogorov フィルタの構成について述べる。

トレンドと観測値のそれぞれの ARMA モデルをそれぞれ以下のように Wald 表現に直す。

$$m_t = \frac{\Theta_m^0(B)}{\psi_m^0(B)} a_{mt}^0, \quad x_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

トレンドと観測値のそれぞれの AGF  $\gamma_m(B, F)$  ,  $\gamma(B, F)$  を以下のように計算する。

$$\gamma_m(B, F) = \frac{\Theta_m^0(B) \Theta_m^0(F)}{\psi_m^0(B) \psi_m^0(F)} V_{mt}^0, \quad \gamma(B, F) = \frac{\theta(B) \theta(F)}{\phi(B) \phi(F)} V_a$$

トレンドと観測値のそれぞれの AGF  $\gamma_m(B, F)$  ,  $\gamma(B, F)$  の比をとることによって、トレ

ンド抽出のための Wiener-Kolmogorov フィルタ  $v_m(B, F)$  を以下のように構成する。

$$v_s(B, F) = \frac{\gamma_m(B, F)}{\gamma(B, F)} = \frac{\frac{\Theta_m^0(B) \Theta_m^0(F)}{\Psi_m^0(B) \Psi_m^0(F)} V_{mt}^0}{\frac{\theta(B) \theta(F)}{\phi(B) \phi(F)} V_a}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \phi(B)\phi(F) = \phi_m(B)\phi_m(F)\phi_N(B)\phi_N(F) \\ \phi_N(B) \text{ はトレンド以外のすべての AR 項を掛けたもの} \end{array} \right]$$

ARIMA モデルにおける Wiener-Kolmogorov フィルタの導出については、Planas (1997) を参照。Wiener-Kolmogorov フィルタの一般的な理論については片山 (2000) が詳しい。Wiener-Kolmogorov フィルタを導く前提である無限観測値の仮定から、フィルタの加重平均の項数も無限になる。実際の計算では Burman-Willson アルゴリズムと呼ばれる計算により、適当な範囲で打ち切って加重平均を計算している (東 (2003) を参照)。

## 人工的なデータによる TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA の比較

この章では、EUROSTAT の開発したフリーの季節調整ソフトウェア“ DEMETRA ”(EUROSTAT (2002)) を用いて、人工的に作成したデータに TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA を適用し、その特性を比較する。

## 1 作成データ

分析に用いるデータは、以下の式によって作成した。

## (1) 時系列データ：

$$y_t = m_t + n_t + c_t + u_t + o_t$$

$$\left[ \begin{array}{l} m_t : \text{トレンド}, n_t : \text{季節成分}, c_t : \text{トランジトリー成分} \\ u_t : \text{不規則変動}, o_t : \text{はずれ値} \end{array} \right]$$

## (2) トレンド：

$$m_t = 0.5i \quad (i = 1, 2, \dots, 100)$$

## (3) 季節成分：

$$n_t = S_t^1 + S_t^2 + S_t^3 \quad (i = 1, 2, \dots, 100)$$

$$\left[ \begin{array}{l} S_t^1 = \sin\left(2\pi \frac{1}{12}i\right), S_t^2 = 4 \sin\left(2\pi \frac{2}{12}i\right), S_t^3 = \sin\left(2\pi \frac{3}{12}i\right) \end{array} \right]$$

## (4) 不規則変動：

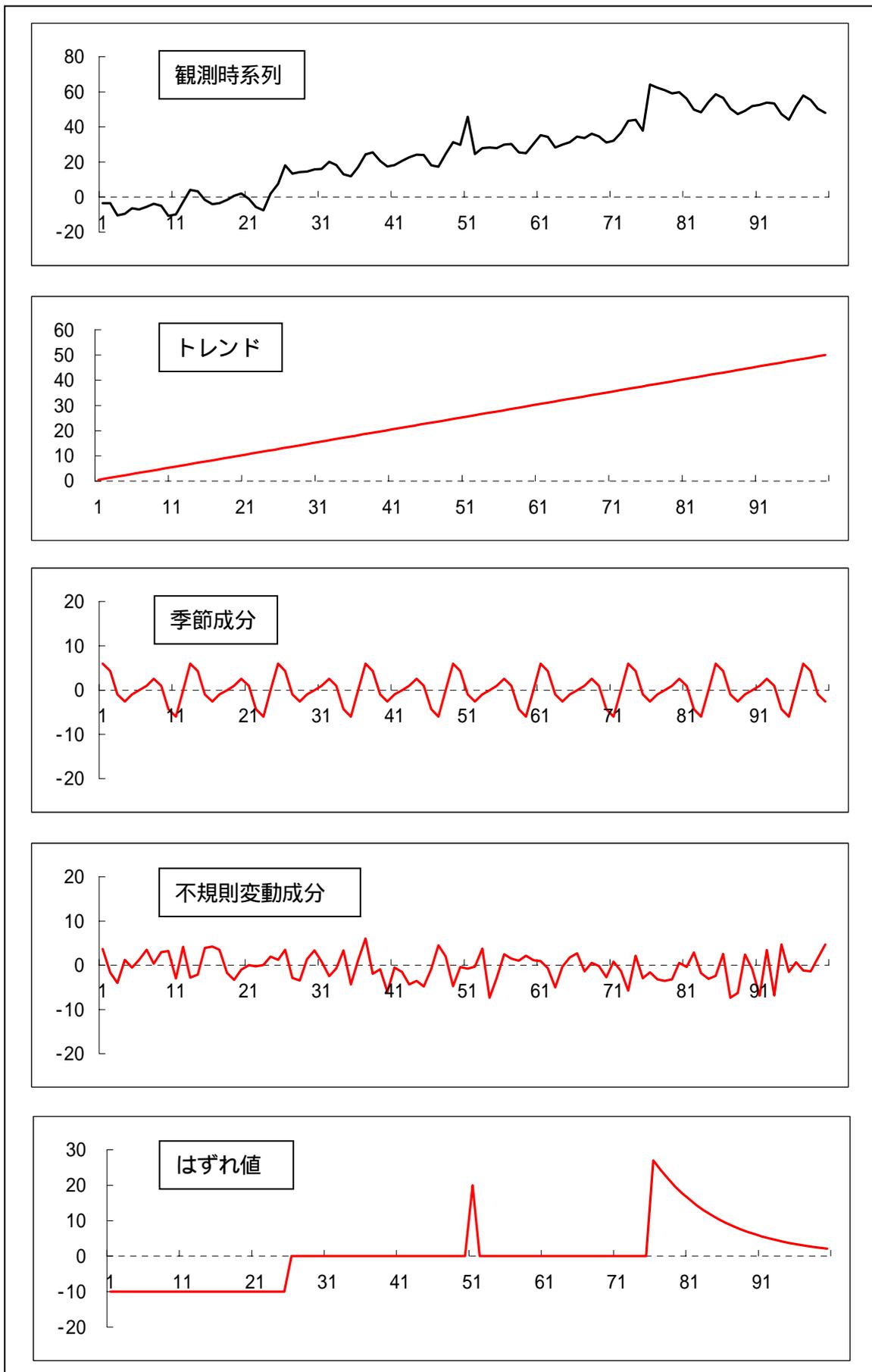
$$u_t \sim N(0,1)$$

## (5) はずれ値：

$$o_t = \begin{cases} -10 & (1 \leq i \leq 25) \\ 0 & (26 \leq i \leq 50) \dots \text{レベルシフト} \\ 20 & (i = 51) \dots \text{加法的はずれ値} \\ 0 & (52 \leq i \leq 75) \\ 30(0.9)^{i-75} & (76 \leq i \leq 100) \dots \text{減衰的はずれ値} \end{cases}$$

このデータは、章ではずれ値の効果を見る際に用いたものと同様である。それぞれの成分のグラフは図 15 のとおりである。

図 15 観測値と各成分のグラフ

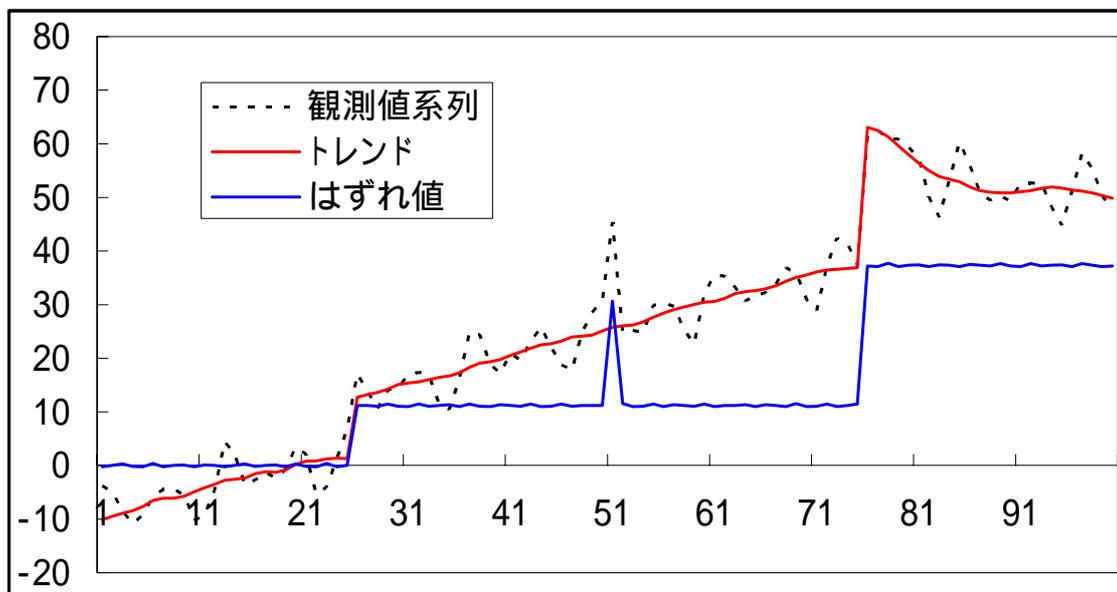


## 2 TRAMO-SEATS によるはずれ値の検出

作成したデータに対して TRAMO-SEATS のモデル自動選択機能を用いて季節調整を行い、季節調整とはずれ値の検出の効果を見ることにする。

前述のデータに対してはずれ値の検出を試みた結果が以下の図 16 である。

図 16 TRAMO-SEATS によるはずれ値の検出結果



今回の分析では、はずれ値の発生する時期については事前に特定せず、TRAMO のはずれ値自動検出機能 ( Automatic Outlier Detection ) を利用してはずれ値の検出を行っている。結果を見ると、TRAMO-SEATS (うち TRAMO パート) のはずれ値自動検出機能は、当初に設定していたレベルシフトを見事にとらえていることが分かる。ただし  $i=75$  の時点で発生した減衰的はずれ値については、単なる減少トレンドとなってしまうしており、しかも  $i=85$  の時点以降、上下に波打っている。今回の減衰的はずれ値は指数的な減少の度合いが非常に緩やかであるため  $(0.9)^i$ 、これを減少トレンドとしてしかとらえられなかったものと考えられる。

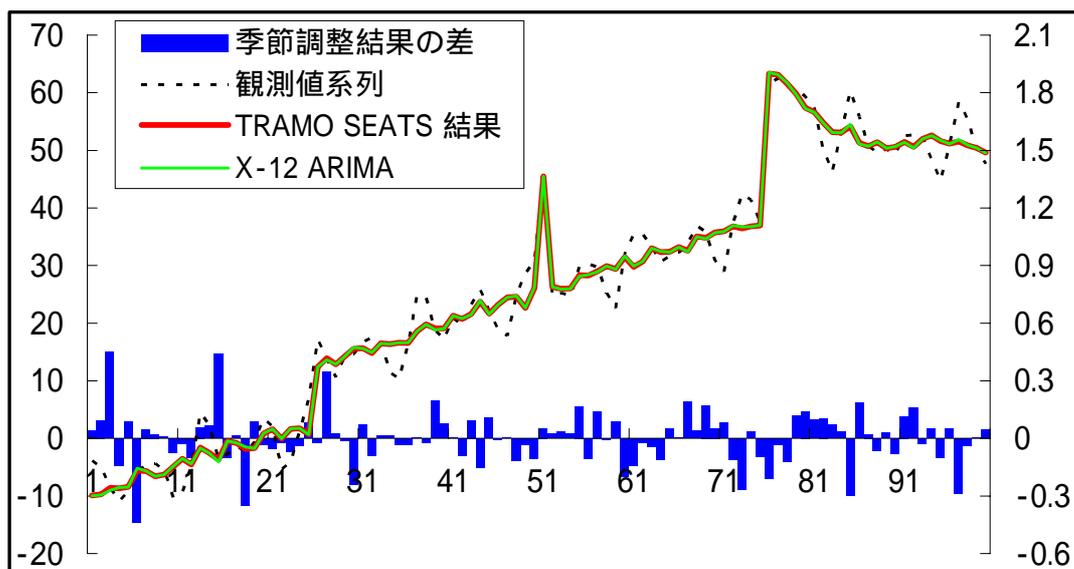
今回の分析に用いた観測値系列では、はずれ値の出現する位置がはっきりしており、不規則変動の動きもそれほど大きくなかったため (不規則変動の分散は 1) 比較的丁寧にはずれ値を調べる TRAMO パートの手法によるはずれ値の検出がうまく機能したと推測される。TRAMO パートのはずれ値自動検出機能は、すべてのはずれ値をすべての時点で調べるという非常に丁寧な機能なのではずれ値の精度の良い検出が期待できる反面、計算量も膨大になるため、計算にはかなりの時間が掛かるものと考えられる。しかし本稿の計算では、1つの観測値系列に対する推定で、計算終了までに 1分程度の時間しか掛からなかった。

### 3 TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA の比較

作成したデータに対して TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA をそれぞれ適用し、それぞれの結果の違いを調べる。データは前節と同じものを用いている。TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA のどちらの方法による推定に対しても、前節と同様に季節調整ソフトウェア DEMETRA を共通に用いた。またその際に、ARIMA モデルの推定については前節と同じく、モデルの自動選択機能を用いて推定しており、ここで推定された ARIMA モデルが両方の手法で共通して用いられている。

以下の図 17 では、最終的な季節調整結果を比較している。

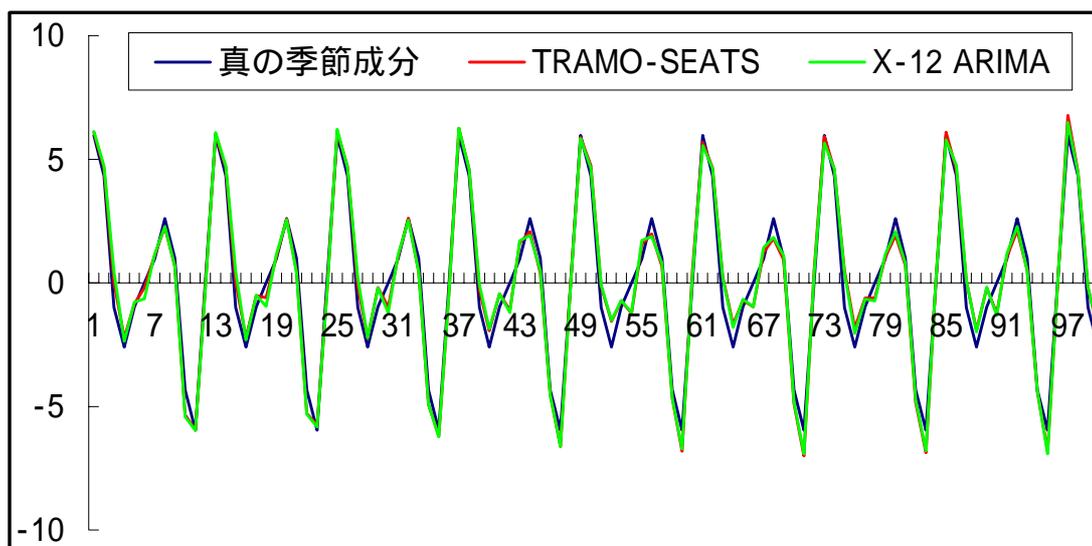
図 17 季節調整結果の比較



推定結果を見る限り、結果にそれほど大きな違いは見られない。TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA との間にそれほど差が無いことは、東 (2003) による GDP 系列の季節調整値の推定でも触れられている。両手法の結果の差異は微々たるもので、それほど大きな違いは無く、どちらの手法を用いても情勢判断にそれほどの影響は無いと言える。

図 18 では“真の”季節成分 ( - 1 - (3) で作成した季節成分) と、TRAMO-SEATS 及び X-12 ARIMA で推定した季節成分の結果を示している。

図 18 季節調整結果の比較



季節成分の推定結果は TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA でほとんど変わらず、どちらも“真の”季節成分に近いものとなっている。ARIMA モデルの当てはめがしっかりとできていれば、どちらの手法を用いてもそれほど違いは出ないと考えられる。

#### 4 まとめ

今回のようにはずれ値の出現する時点が分かりやすい時系列であれば、TRAMO パートで採用されているはずれ値検出の方法は、優れていると言える。TRAMO パートで用いられているはずれ値の自動検出の方法は、非常に丁寧にはずれ値の検出を行い、かつ推定に時間もそれほど掛からない。

X-12 ARIMA を利用するにしても、ARIMA モデルの当てはめは必要であり、その際には丁寧にモデルを当てはめる DEMETRA の手法 (TRAMO パート) を利用するのが賢明であろう。“新の季節調整値”と比較した場合でも、どちらが優れているとの結論は出しにくい状況にある。季節調整手法を現行のものから変えるのであれば、それなりの合理的な説明が必要である。どちらの手法を用いても結果がそれほど変わらないのであれば、新たな手法を取り入れる必然性は見いだせない。結果に大きな違いが無く、目立った改善が見られないのであれば、今使用している手法をあえて別の手法に変える必要は無いであろう。

季節調整とは結局、乱暴に言えば架空の値、すなわちフィクションであり、どの手法を用いても確実に正しいと言えるものは無いと言える。そうであれば、現在 X-12 ARIMA を用いているのならばそれを利用し続けるのも 1 つの考え方であり、TRAMO-SEATS は結果のチェック用に使うという手もある。通常であれば結果がそれほど変わらないことを利用して、一方に大きな変動があった場合には、他方にもそのような変化が無いかを見ることによって、これが手法に根ざした問題なのか、時系列の特性で問題ないものなのかを知る手掛かりになると考えられる。

おわりに

( TRAMO-SEATS の改善策の提案及び今後の展望 )

70年代から80年代にかけて移動平均ベースのImplicitな季節調整法の発展があったのに対して、90年代からは時系列のモデルを明示的に設定するExplicitな季節調整法の大きな進展があった。特に2000年代に入ってから、ベイズ統計の進歩とPCの性能向上があって、より複雑な季節調整の手法も検討されており、季節調整は新たな段階に入ったと言えることができる。理論上考えられていたものの計算が困難であった手法が、より身近なものとなってきている。移動平均の方法のマイナーチェンジで季節調整法を改良しようという考え方は、もはや古いものになっている。X-12 ARIMAなどの移動平均ベースのアドホックな季節調整法は、プログラム内部で行われている一連の計算の手続を理解するのが容易であり、直感的に分かりやすい手法であった。しかし本稿で触れたTRAMO-SEATS、DECOMPといった、分解すべき時系列のモデルを明確に指定するようなモデル型の季節調整法については、その理論を理解するだけでもかなりの量の予備知識が必要となり、また実際に組まれたプログラムを解読するのもも相当な困難があるため、勢い手法の中身をよく理解しないままに、それぞれの季節調整法をブラックボックスとして理解してしまいがちである。既存の季節調整法は数多くあるものの、それぞれにメリットとデメリットがあり、また各手法を適用することで得られた結果の特徴の違いは手法の理論的な側面にも依存しており、本質的なものであるため、手法の詳細を理解することで初めてとらえることができるという構造を持っている。

本稿では、スペイン銀行で開発されて現在では欧州で主に利用されている季節調整の手法であるTRAMO-SEATS法について、その手法の理論的な側面と結果に与える影響を理解することを目的としている。更に進んで、TRAMO-SEATSの中で適用されている計算ルーチンの詳細についても触れており、TRAMO-SEATSの理論自体から生ずる問題のほか、ソフトウェアに搭載されているTRAMO-SEATSを実現させるルーチンそのものから生ずる問題にも焦点を当てて解説をしている。TRAMO-SEATSの導入に関して、我が国では様々な議論があるようである。しかし手法の中身をよく理解しないままにその導入を検討することは避ける必要がある。TRAMO-SEATSによる季節調整値が大きな変動を示したとき、それが分析者の手によるものなのか、理論的な面から生ずるこの手法に根ざした本質的な避けがたい問題なのか、計算ルーチンを取り替えれば済む問題なのかをそれぞれ分けて議論し、問題の原因とその対処方法について、正確に特定する必要があるからである。このような季節調整手法は、ブラックボックスのまま導入されるべきではないと考える。

TRAMO-SEATSには理論的に見て改良すべき点もあり、まだ発展途上の段階にあると考えられる。カルマンフィルタの理論が開発され、PCなどの利用環境もよく整備されている今日に至ってなお、昔の古い信号抽出理論 ( Signal Extraction Theory ) の枠組みを基にしたWiener-Kolmogorovフィルタをベースとする季節調整法を検討するのは、時代にそぐわないことであると考えられる。そこでTRAMO-SEATSについては例えば、以下のような改善案が考えられる。

ARIMAモデルに基づいてAMB分解を行った後に、時系列の分解を、Wiener-Kolmogorovフィルタではなく状態空間モデル及びカルマンフィルタ ( 実際の計算は情報行列平方根フィルタ ) で行う方法が考えられる。無限観測値を仮定しなくてよいので、実際に観測されるデータを用いる場合にも問題ないと言える。また、Wiener-KolmogorovフィルタやX-12のような加重平均型のフィルタと異なり、時系列の端点で観測値が不足する問題も起こらない。

ARIMAモデルの次数選択を更に機能的に行う方法を考える。具体的には、ARIMAモデルが状態空間モデルの枠組みで記述されることを利用し ( Durbin & Koopman ( 2003 ) )、モデル

の次数選択の際に状態空間モデルを積極的に利用し、ARIMA モデルの次数選択についても AIC などの情報量基準でシステマティックに行えるような環境を目指す。ARIMA モデルの同定のプロセス中で、モデルの次数選択は経験的な要素が大きく恣意性が入りやすい部分であり、この部分について AIC などの情報量基準で統一的なモデル選択ができるようになることの利点は大きいと考えられる。ただしモデルのパラメータの有意性を検定する作業は引き続き重要である。

X-12 ARIMA を開発したアメリカセンサス局においても、これまでの X-12 ARIMA の機能に SEATS の機能を付加した X-13 についてのワーキングペーパーが発表されているほか、X-12 ARIMA の時系列分解のルーチンを SEATS に置き換える ARIMA-SEATS という季節調整法の研究が進んでいて、論文も多数発表されている。これら一連の動きについては、今後の動向を注意深くフォローしておく必要がある。

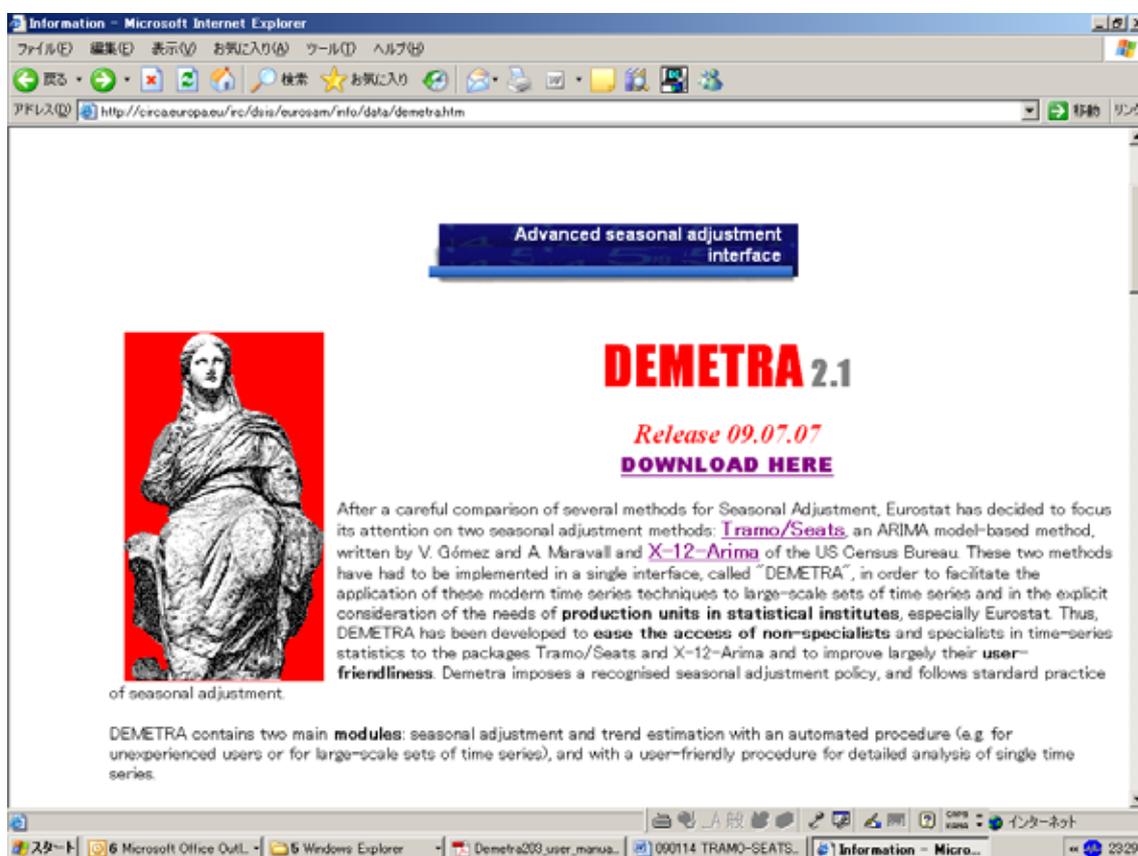
本稿ではさらに、今後 TRAMO-SEATS を利用して分析をする方の参考に資するべく、フリーの季節調整用ソフトウェア DEMETRA の利用方法に触れるとともに、人工的に作成したデータに対して季節調整を適用し、その振る舞いについて論じた。分析の結果、季節調整手法の理論的な面から事前に予測されていたとおり、X-12 ARIMA と比較して TRAMO-SEATS による結果の方が、トレンドや季節性の変動が滑らかとなった。これに対応して TRAMO-SEATS による季節調整結果の方が、変動がやや大きくなる傾向が見て取れた。本稿が、今後 TRAMO-SEATS を利用した時系列の分析を予定されている方に対して、TRAMO-SEATS を理解するための参考資料となれば幸いである。

X-12 ARIMA や DECOMP などの、本質的に ARIMA モデルをベースにした Explicit なモデルベースの季節調整法が整備されていく中で、Implicit な、ノンパラメトリック的な手法を用いた全く新しい季節調整法についてもまた、開発の動きが進んでいるようである。例えばウェーブレット解析を利用した季節調整法の研究などが進められている (Jicheng, Et al (2004))。ウェーブレットは時間と周波数の両方の領域の解析を同時に行うことができる手法であり、90 年台前半から研究が盛んになってきている。時間領域における解析を基にした DECOMP と、周波数領域での解析を基にした TRAMO-SEATS のどちらとも異なり、ウェーブレットを利用することで時間と周波数の両方の領域を同時に解析することができて、周波数の時間的な発展を解析することもできるようになる。またウェーブレットを用いることで、自己相関の影響がなかなか減衰せず、非常に長期にわたるような長期記憶過程 (long memory process) の解析を有効に行うことができると言われている。さらにウェーブレットを用いることで、ノンパラメトリックな手法により、比較的緩い条件の下で、はずれ値の位置を特定することも可能になるかもしれない。ウェーブレットを利用できる実用可能な季節調整の手法とそのためソフトウェアが今後開発される可能性は十分にある。しかしウェーブレット解析については、その理論が数学的に非常に高度であり、更なる研究が必要であると考えている。季節調整法を含む、ウェーブレットを用いた時系列分析については、いずれ稿を改めて論じることとしたい。

## 参考 季節調整ソフトウェア「DEMETERA」の使用方法

TRAMO-SEATS は多くのソフトウェアに移植されており、PC、サーバーなど様々な環境で利用できるようになっている。商用では計量経済計算用の E-views に移植されている。フリーのソフトウェアとしては、EUROSTAT の開発した季節調整ソフトウェア DEMETERA がある。これは GUI ( Graphical User Interface ) の点で優れており、対話的な単純なボタン操作によって、TRAMO-SEATS と X-12 ARIMA の 2 つの季節調整を手軽に行うことができる。またグラフの描画や季節調整結果に対する様々な統計的検定、診断を行うことも可能である。DEMETERA の名称の由来はギリシャ神話の女神であり、その詳細については DEMETERA の公式マニュアルを参照していただきたい。

以下では、季節調整ソフトウェア DEMETERA の操作方法について、EUROSTAT の DEMETERA の公式ホームページ ( <http://circa.europa.eu/irc/dsis/eurosam/info/data/demetra.htm> ) 及び EUROSTAT が発行している DEMETERA のマニュアルを基に、簡単にまとめている。



DEMETERA 公式ホームページ

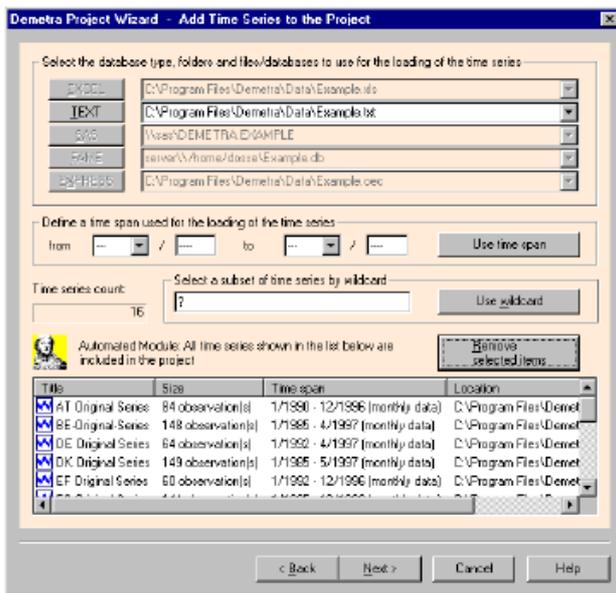
### 1 ソフトウェアのインストール

DEMETERA の公式ホームページからソフトをダウンロードし、ウィザードに従ってインストールする。古いバージョンの DEMETERA をインストールしている場合には、これをアンインストールした上で、新しいバージョンのインストールを行うようにする。ホームページには、「初めて使用する者は所属、氏名、メールアドレスを Contact Information Page に記載されている担当者あてに送付すること」との記述があるものの、特に連絡を取らなくても使用には差し支えない。

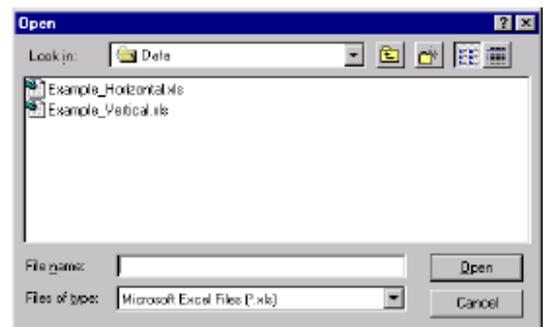
## 2 データの読み込み

DEMETERA を起動させると、モデル自動選択機能を利用するか、マニュアルでモデルをチューニングするかのいずれかを選ぶ画面になる。モデル自動選択機能は操作が容易なので、これを利用することを念頭において以下の解説を行う。マニュアルで詳細なモデルを設定する場合には、DEMETERA の公式マニュアルを参考にさせていただきたい。

モデル自動選択機能を選択すると、データ選択画面が表示される。ここで解析に用いるデータを選択する。DEMETERA はテキストファイルのほか、SAS、エクセル、オラクルなどのデータを読み込むことができる。エクセル形式はファイルの準備に手間が掛からないので、推奨する。データの入力形式は、インストール時に作成される EXAMPLE ファイルを参考にさせていただきたい。



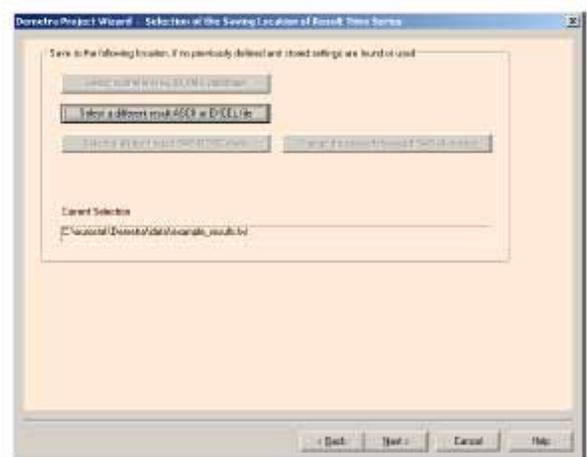
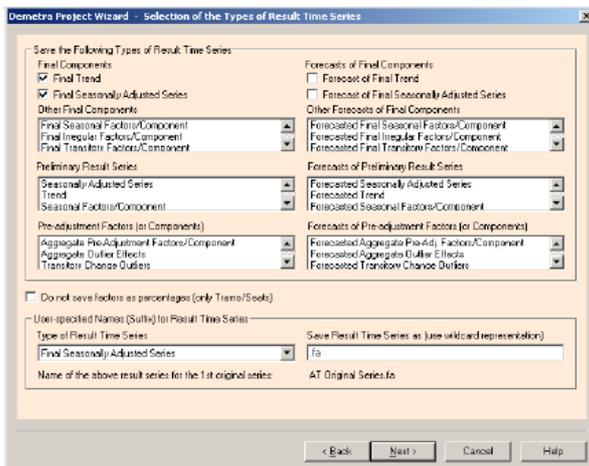
データの選択



エクセルデータの選択

## 3 出力結果の選択

エクセルのデータを選択すると、以下の出力結果選択画面が表示される。

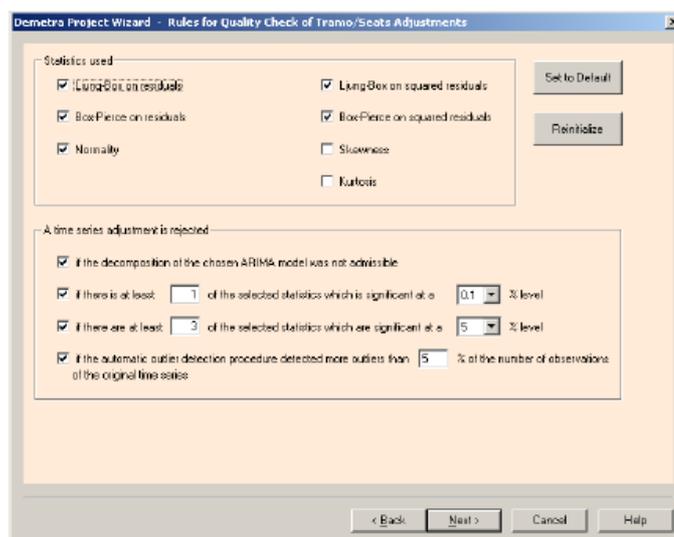


ここで、分析の後に出力する系列を選択する。季節調整済系列のほか、トレンドや季節性、はずれ値など様々な要素を出力することができる。また ARIMA モデルによる予測値の計算や出力についても、ここで選択できる。出力結果を選択すると、出力先を求められるので、適当

な保存場所を選択する。

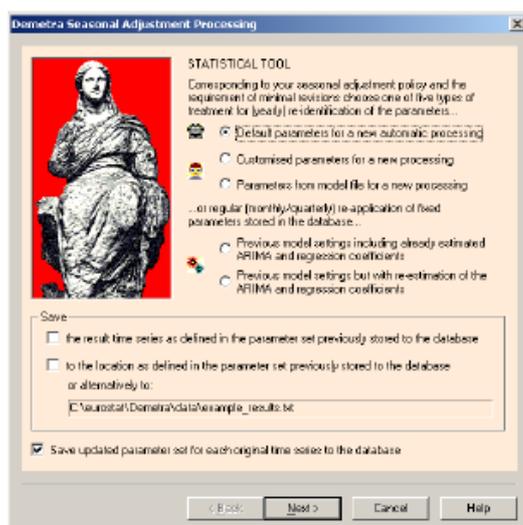
#### 4 診断統計量の選択

出力先を選んだ後、モデルの診断に使用する統計量を選択する。ARIMA モデルの当てはまりを見るのによく用いられる Ljung-Box 統計量や Box-Pierce 検定統計量などが選択できる。残差の正規性検定なども行うことができる。診断統計量に照らしてモデルの当てはまりが悪い場合には、モデルを棄却することになる。モデル棄却のための基準についてもこの画面で設定できる。モデル棄却の基準については必須の選択事項ではなく、指定しなくてもよい。

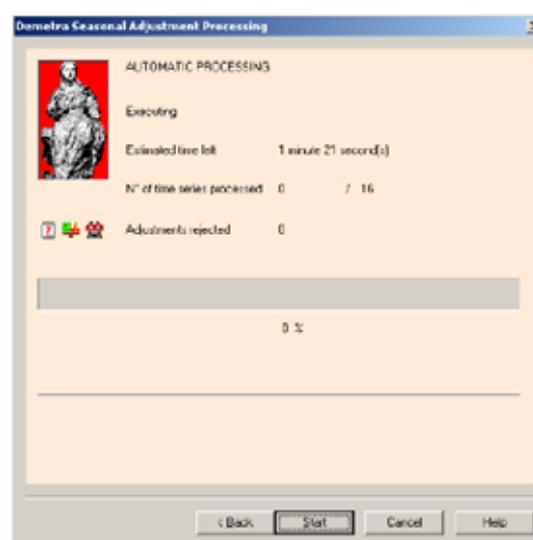


#### 5 モデルの選択ウィザード

ここまで進むと、モデルの選択ウィザードに移る。後は画面の表示に従って ARIMA モデルの次数などを選択する。



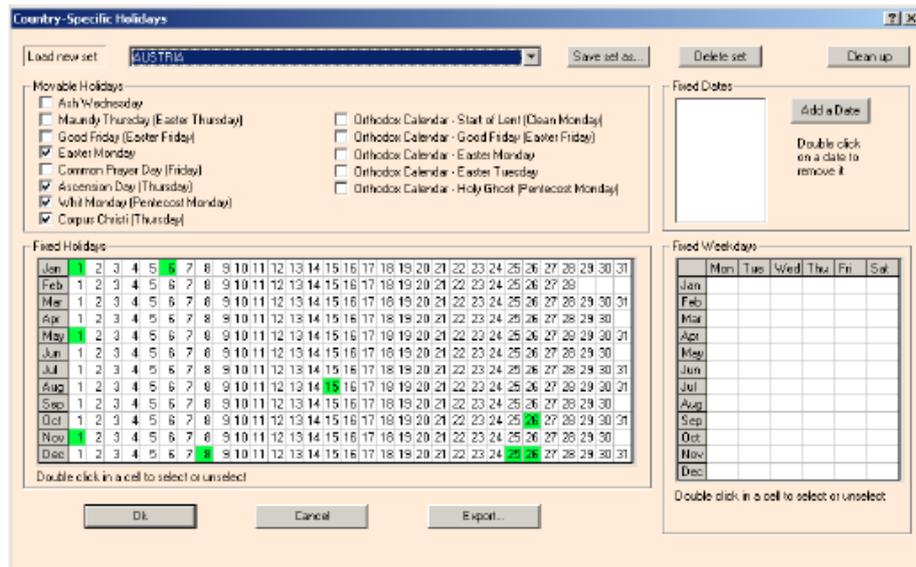
モデル選択ウィザード



計算中に表示される画面

モデルの自動選択機能を起動している場合には、ARIMA モデルの次数を選択する必要は無く、次のステップに進むことができる。あらかじめ事前に定めた特定のモデルを用いる場合に

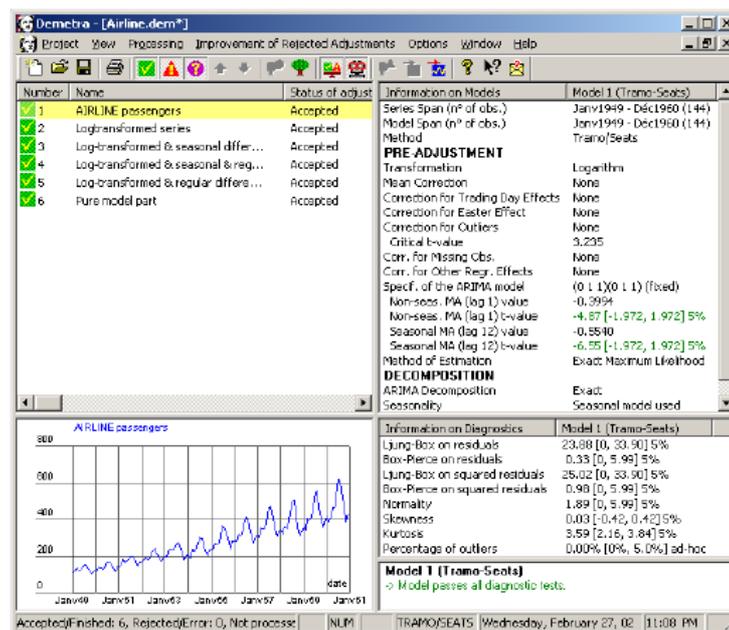
は、モデル選択ウィザードの指示に従って ARIMA モデルの AR 項、MA 項の次数を選択すればよい。すべての選択が終わると、計算が始まる。DEMETERA の計算は速く、モデルの自動選択のすべての過程を含めても、1 分も掛からない。なおモデル選択の際には、以下のようにカレンダーの特定の日を選ぶ形で容易に、ユーザー定義の曜日効果などを取り入れることが可能である。



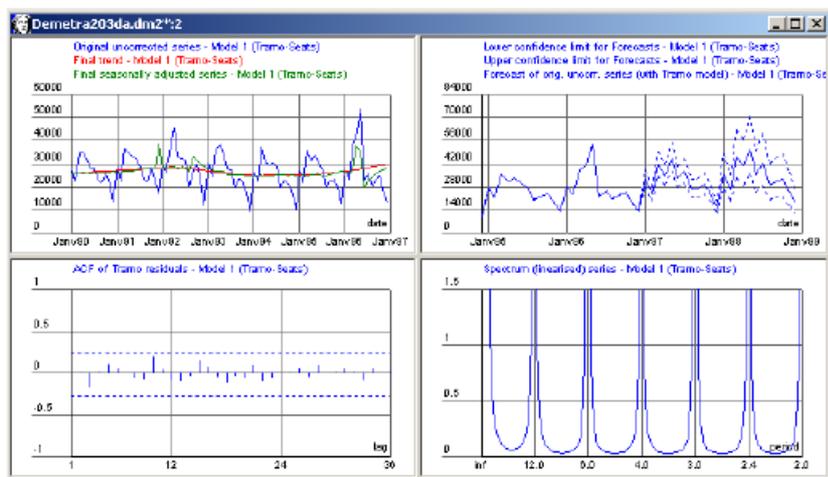
曜日効果の設定

## 6 計算結果の表示

すべての計算が終わると、以下の結果表示画面が現れる。ここで更なる解析に移ることもできる。しかし結果はエクセルなどに出力して、エクセルで編集、分析を行った方が、データのハンドリングが容易であると個人的には思う。このほか、スペクトルの計算及び描画や推定結果の安定性の診断、時系列の予測なども行うことができる。これらの詳細については、DEMETERA の公式マニュアルを参考にして研究していただきたい。



計算結果の表示画面



計算結果の表示画面

参考文献

[和文]

- [1] 東 晋司 (2003), 季節調整プログラム X12-ARIMA と TRAMO-SEATS の分解構造 - 試験的な実証分析を添えて -, 内閣府経済社会総合研究所ディスカッションペーパーシリーズ No.63
- [2] 尾崎統, 北川源四郎 編 (1998), 時系列解析の方法, 朝倉書店
- [3] 片山徹 (2000), 新版 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店
- [4] 川崎能典, 佐藤整尚 (1997), 季節調整の「最適性」について, 統計数理, 45 巻 2 号
- [5] 北川源四郎 (1986), 時系列の分解 - プログラム DECOMP の紹介 -, 統計数理, 34 巻 2 号, 統計数理研究所
- [6] 北川源四郎 (1997), 季節調整プログラム DECOMP とその後の展開, 統計数理, 45 巻 2 号, 統計数理研究所
- [7] 北川源四郎 小西貞則 (2004), 情報量基準, 朝倉書店, 2004
- [8] 北川源四郎 (2005), 時系列解析入門, 岩波書店
- [9] 国友直人 (1997), 季節調整法 X-12-ARIMA の特長と問題点, 東京大学大学院経済学研究科ディスカッションペーパーシリーズ, J-5
- [10] 国友直人 (2001), 季節調整法 X-12-ARIMA(2000)の利用: 法人企業統計の事例, 東京大学大学院経済学研究科ディスカッションペーパーシリーズ, CJ-58
- [11] 国友直人 編 (2004), 解説 X12-ARIMA(2002), CIRJE Research Report Series, 2004
- [12] 佐藤整尚 (1997) 「Web Decom の紹介 - WWW 上で行う季節調整システム - 」, 統計数理, 45-2, 245-263
- [13] 高部 勲 (2005) 「状態空間モデルを用いた季節調整法の労働力調査への適用」, 総務省統計局, 統計研究彙報, 62, 71-92
- [14] 中村博和 (2007) 「時系列の季節調整と統計的検定 (2)」, 佐賀大学経済論集, 39, 59-73
- [15] 日野幹夫 (1977), スペクトル解析, 朝倉書店

[英文]

- [16] J. Dossé. and C. Planas. (1996), Pre-adjustment in Seasonal Adjustment Methods: A Comparison of REGARIMA and TRAMO, Eurostat working group document
- [17] J. Durbin. and J. Koopman. (2001), “Time series Analysis by State Space Methods”, Oxford University Press

- (邦訳:和合肇, 松田安昌 訳(2004)「状態空間モデリングによる時系列分析入門」シーエーピー出版)
- [ 18 ] Eurostat( 2002 ), Demetra User Manual Release Version 2.0, the Statistical Office of the European Communities
- [ 19 ] D. Findley. et al ( 1998 ) , New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program, Journal of Business and Economic Statistics, 16, 127 -176
- [ 20 ] V. Gomez., and A. Maravall. ( 1996 ) , Programs TRAMO (Time series Regression with ARIMA noise, Missing values, and Outliers) and SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series): Instructions for the User, Working Paper 9628, Banco de Espana
- [ 21 ] V. Gomez., and A. Maravall.( 2001 ),“ Seasonal Adjustment and Signal Extraction in Economic Time Series ”, New York: J.Wiley and Sons
- [ 22 ] A. Harvey. ( 1981 ) , “Time series Models”, Philip Allan Publishers, (邦訳:国友直人, 山本拓(1985)「時系列モデル入門」東京大学出版会)
- [ 23 ] L. Jicheng. Et al( 2004 ) , Applying wavelet analysis in the seasonal adjustment , Communications, Circuits and Systems, 2004. ICCAS 2004 International Conference on Volume 2, 747 - 750
- [ 24 ] G. Kitagawa and W. Gersch. ( 1994 ) , A smoothness priors state space approach to the modeling of time series with trend and seasonality, The Journal The American Statistical Association, 79, 378-389
- [ 25 ] R. Kaiser, and A. Maravall( 2000 ) , “ Notes on Time Series Analysis ,ARIMA Models and Signal Extraction ” , Banco de España Working Papers, Banco de España
- [ 26 ] R. Kaiser., A. Maravall( 2001 ) , Measuring Business Cycles in Economic Time Series, Lecture Notes in Statistics, 154, Springer-Verlag, New York
- [ 27 ] A. Maravall. ( 1995 ) , “ Unobserved Components in Economic Time Series ” , The Handbook of Applied Econometrics, Vol.1, Oxford: Basil Blackwell.
- [ 28 ] A. Maravall.( 2002 ),“ Brief Description of the TRAMO-SEATS Methodology ”in Modeling Seasonality and Periodicity, Proceedings of the 3rd. International Symposium on Frontiers of Time Series Modeling, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo
- [ 29 ] A. Maravall. ( 2003 ) , A Class of Diagnostics in the ARIMA-Model-Based Decomposition of a Time Series. Memorandum, Bank of Spain
- [ 30 ] A. Maravall. ( 2007 ) , Large Scale Applied Time Series Analysis with Program TSW ( TRAMO-SEATS for Windows )
- [ 31 ] C. Planas( 1997 ) , Applied Time Series Analysis: Modeling, Forecasting, Unobserved Components Analysis and the Wiener-Kolmogorov Filter, Working Group Document, Eurostat
- [ 32 ] D. Pollock( 2002 ) , A review of TSW: the Windows version of the TRAMO-SEATS program, Journal of Applied Econometrics, vol. 17, issue 3, pages 291-299
- [ 33 ] U.S.Census Bureau ( 2002 ) , X-12 ARIMA Reference Manual Version0.2.10

## [ホームページ URL]

- [ 34 ] アメリカセンサス局 The X-12 ARIMA Seasonal Adjustment Program ホームページ (アドレス : <http://www.census.gov/srd/www/x12a/>)
- [ 35 ] 統計数理研究所 Web-DECOMP (アドレス : <http://ssnt.ism.ac.jp/inets2/title.html>)
- [ 36 ] “TIMSAC for R package” ホームページ (アドレス : <http://ssnt.ism.ac.jp/inets2/JapaneseVersion/title.html>)
- [ 37 ] “Web-DECOMP” ホームページ (アドレス : <http://ssnt.ism.ac.jp/inets2/JapaneseVersion/title.html>)
- [ 38 ] “時系列解析プログラミング” ホームページ (アドレス : <http://tswww.ism.ac.jp/kitagawa/HTML-new/IWANAMI/岩波時系列解析プログラム.html>)